

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Когут Ярослав Петрович**

УДК 517.977.5: 517.957

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**Апроксимація розв'язків задач оптимального**  
**керування для рівнянь типу Перона-Маліка**

111 — Математика

11 — Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня  
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ Я. П. Когут

Науковий керівник: **Парфінович Наталія Вікторівна**  
доктор фізико-математичних наук, професор

Дніпро — 2025

## АНОТАЦІЯ

*Когут Я.П.* Апроксимація розв'язків задач оптимального керування для рівнянь типу Перона-Маліка. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, Дніпро, 2024.

Дисертаційна робота присвячена задачам оптимального керування для класу нелінійних вироджених еліптичних та параболічних рівнянь, а також для квазі-лінійних параболічних рівнянь зі змінним показником нелінійності. Основна увага приділяється питанням розв'язаності таких задач та методам апроксимації їх розв'язків. Характерною особливістю розглянутого класу задач є те, що вони формулюються для об'єктів, які описуються рівняннями математичної фізики з немонотонними та некоерцитивними операторами. Типовими представниками такого типу рівнянь є рівняння Перона-Маліка та їх узагальнені варіанти. Зазвичай таким рівнянням притаманні відсутність апіорних оцінок на їх слабкі розв'язки та неіснування глобальних розв'язків відповідних крайових задач. В зв'язку з цим питання щодо існування оптимальних керувань такими об'єктами набувають нетривіального звучання. Окремою проблемою тут виступає пошук схем та методів апроксимації відповідних задач оптимального керування, при яких всі чи лише деякі їх оптимальні розв'язки можна апроксимувати із заданою точністю розв'язками інших оптимізаційних задач, що є значно простішими з точки зору їх практичної реалізації.

Дисертація має теоретичний характер. Отримані результати складають науковий інтерес і можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії оптимального керування.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, наведено опис предмета та об'єкта досліджень, зазначено зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами, темами, підкреслена наукова новизна, мета дослідження, практичне значення, особистий внесок здобувача та інформацію

щодо апробації отриманих результатів.

В першому розділі наводяться основні відомі результати та факти з нелінійного функціонального аналізу та теорії рівнянь в частинних похідних, які суттєво використовуються в подальшому аналізі. ————— Зокрема, даються означення та основні властивості просторів Соболева та Соболева-Орлича, а також теореми вкладення, які з ними пов'язані. Окремим пунктом виступають простори функцій з обмеженою варіацією та властивості компактності обмежених множин в таких просторах. Наводяться відомі результати Boccardo-Murat стосовно поточної збіжності градієнтів розв'язків непараметризованих нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь. Зазначено, що попри наявну слабку збіжність градієнтів  $\nabla u_k$ , які забезпечують умови граничного переходу в рівняннях типу

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x, u_n, \nabla u_n) &= f_n + g_n \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} + A(u_n) &= f_n + g_n \quad \text{в } (0, T) \times \Omega, \end{aligned}$$

має місце і їх поточкова збіжність. На завершення розділу, наводяться результати Жикова В.В. про узагальнення відомого результату Tartar–Murat'a, який називають принципом компенсованої компактності.

Другий розділ присвячено дослідженню одного класу оптимізаційних задач, коли об'єктом керування виступає крайова задача Неймана для стаціонарного рівняння Перона-Маліка, яке в своїй головній частині містить некоерцитивний та немонотонний диференціальний оператор дивергентного типу. А саме, розглядається така задача оптимального керування

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right| \end{aligned}$$

за наявності обмежень

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) + \alpha u &= v \quad \text{в } \Omega, \\ \partial_{\nu} u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned}$$

$$0 \leq u(x) \leq M \quad \text{м.с. в } \Omega,$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega).$$

Характерною особливістю такої задачі є те, що вона формулюється для квазі-лінійного еліптичного рівняння з немонотонним та некоерцитивним дивергентним оператором. Як наслідок, існування розв'язків відповідної крайової задачі при кожному допустимому керуванні, їх основні топологічні та функціональні властивості вимагають окремого дослідження. Означені обставини унеможливають залучення відомих підходів до проблеми розв'язаності поставленої задачі оптимального керування.

В зв'язку з цим в роботі запропоновано залучити так званий непрямий підхід до перевірки існування оптимальних пар в означеній задачі. З цією метою пропонуються апроксимувати вихідну задачу сукупністю параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного дивергентного оператора. Основною перевагою запропонованої апроксимації є той факт, що апроксимаційні задачі формулюються для лінійних невідроджених еліптичних рівнянь. Як наслідок, при кожному значенні малого параметра  $\varepsilon > 0$  такі задачі мають непорожню множину розв'язків.

Залучаючи певне узагальнення теореми Boccardo-Murat було показано, що будь-яка послідовність оптимальних розв'язків для апроксимаційних задач є компактною в певній топології, яка дозволяє перейти до границі в основних співвідношеннях апроксимаційної задачі. Зокрема, важливою обставиною тут є те, що послідовність градієнтів розв'язків таких задач є збіжною в поточковому сенсі. Саме ця властивість дозволило показати, що будь-яка кластерна точка послідовності оптимальних розв'язків апроксимаційних задач є оптимальною парою для вихідної задачі. Тим самим, отримано достатні умови розв'язаності поставленої задачі оптимального керування, а також наведено схему побудови наближень її розв'язків.

*Третій розділ* присвячено питанням існування розв'язків одного класу задач оптимального керування для еволюційної версії рівнянь Перона-



Маліка, та методам їх апроксимації. Запропоновано загальний підхід до апроксимації розв'язків таких задач параметризованими задачами з фіктивними керуваннями для коректних за Адамаром початково-крайових задач Коші-Неймана. За аналогією з попереднім розділом, показано, що кожна з апроксимаційних задач є коректно поставленою, має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, що утворена такими розв'язками, прямує до оптимальної пари для вихідної задачі керування. Проте, з технічної точки зору, основні результати цього розділу опираються на принципово іншу версію узагальнення теореми Boccardo-Murat для квазі-лінійних параболічних рівнянь. Окрім цього було показано, що окремою достатньою умовою розв'язаності поставленої задачі оптимального керування, є обмеженість обраної послідовності розв'язків апроксимаційних задач в заданій топології. Насправді, виконанням цієї умови можна знехтувати, якщо множина допустимих розв'язків для вихідної задачі є непорожньою. Проте в еволюційному випадку, через можливе неіснування глобальних розв'язків, ця проблема залишається відкритою. Таким чином, залучаючи непрямий підхід, було отримано достатні умови розв'язаності поставленої задачі оптимального керування для еволюційного рівняння Перона-Маліка а також наведено схему апроксимації її розв'язків.

В четвертому розділі пропонується нове формулювання задачі відновлення цифрових зображень, які спотворені адитивним та кумулятивним шумом, у вигляді задачі оптимального керування для квазілінійного параболічного рівняння з нелокальним  $p[u]$ -лапласіаном та керуванням з класу  $L^1$ . А саме, об'єктом керування виступає така початково-крайова задача

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u &= f \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) &= f_0 \quad \text{в } \Omega.\end{aligned}$$

Тут

$$A_w(t, x, \nabla u) := |D(t, x, w) \nabla u|^{p_w(t, x) - 2} D(t, x, w) \nabla u,$$

Характерною особливістю запропонованої постановки є те, що змінний порядок нелінійності  $p(t, x)$  і тензор анізотропної дифузії  $D(t, x)$  в дивергентному операторі параболічного рівняння не є а priori визначеними, а, натомість, ці характеристики нелокально залежать від розв'язку початково-крайової задачі для означеного параболічного рівняння. Як наслідок,  $-\operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u$  є прикладом сильно нелінійного, немонотонного та некоерцитивного дивергентного оператора. Отже, вихідна початково-крайова задача, для якої формулюється проблема її оптимального керування, є погано обумовленою в загальному випадку. В зв'язку з цим, залучаючи методи теорії збурень та принцип нерухомої точки Шаудера, було показано, що така задача допускає принаймні існування слабких розв'язків в змінному просторі Соболева-Орлича, які можна отримати як границі послідовностей розв'язків певних збурених задач. Такі розв'язки було названо  $W_0$ -досяжними. Виходячи з цього було запропоновано перейти від вихідної задачі оптимального керування до дослідження її релаксаційного варіанту, переформулювавши її на пошук оптимальних пар на множині  $W_0$ -досяжних розв'язків з ослабленим функціоналом якості. Як наслідок такого уточнення, це дозволило встановити достатні умови розв'язаності поставленої задачі оптимального керування та отримати ітераційну процедуру для апроксимації оптимальних пар. Для ілюстрації одержаних в цьому розділі результатів, наведено модельні розрахунки з обезшумлення супутникових зображень, залучаючи запропонований підхід.

**Ключові слова:** оптимізація, оптимальне керування, крайова задача, рівняння Перона – Маліка, умови оптимальності, апроксимація розв'язків, диференціальні оператори, простори Соболева – Орлича, норма у змінному просторі, теореми вкладення, білий шум, інтеграл Лебега, похідна Гато.

*Kohut Ya. P.* Approximation of solutions of optimal control problems for the Perona-Malik type equations — Manuscript.

Thesis for the Doctor degree of Physical and Mathematical Sciences in Speciality 111 — Mathematics. — Oles Honchar Dnipro National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, 2024.

The thesis is devoted to optimal control problems for a class of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations, as well as for quasi-linear parabolic equations with a variable order of nonlinearity. The main attention is paid to the solvability issues of such problems and methods of their approximation. A characteristic feature of the considered class of problems is that they are formulated for objects that are described by equations of mathematical physics with non-monotone and non-coercive operators. Typical representatives of this type of equations are the Peron-Malik equations and their generalized variants. As a rule, such equations are characterized by the absence of a priori estimates for their weak solutions and the nonexistence of global solutions to the corresponding boundary value problems. In this regard, the question of the existence of optimal controls such objects acquire a non-trivial analysis. A separate problem here is the development of the schemes and methods for approximating the corresponding optimal control problems, in which all or only some of their optimal solutions can be approximated with a given accuracy by solutions of other optimization problems, which are much simpler from the point of view of their practical implementation.

The dissertation is of a theoretical nature. The results obtained are of scientific interest and can be used in further research in the optimal control theory.

The introduction justifies the relevance of the research topic, describes the subject and object of research, indicates the connection of the thesis with scientific programs and topics, emphasizes the scientific novelty, the purpose of the research, practical significance, the personal contribution of the applicant, and information on the approval of the results obtained.

*In Chapter 1* we give some preliminaries and notions that will be needed in the sequel. In particular, we describe the well-known results and facts of

nonlinear functional analysis and the theory of partial differential equations, which are significantly used in the further analysis. In particular, we give the definitions and basic properties of Sobolev and Sobolev-Orlich spaces, as well as the embedding theorems associated with them. A separate item is the spaces of functions with bounded variation and the compactness properties of bounded sets in such spaces. The well-known results of Boccardo-Murat are given regarding the pointwise convergence of gradients of solutions of non-parameterized nonlinear elliptic and parabolic equations. It is noted that despite the existing weak convergence of gradients  $\nabla u_k$ , which provide the conditions for the limit passage in equations of the type

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x, u_n, \nabla u_n) &= f_n + g_n \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} + A(u_n) &= f_n + g_n \quad \text{в } (0, T) \times \Omega, \end{aligned}$$

their pointwise convergence also takes place. At the end of this chapter, the Zhikov's results on the generalization of the well-known Tartar-Murat result, which is called the principle of compensated compactness, are presented.

*Chapter 2* is devoted to the study of one class of optimization problems, when the control object is described by the Neumann boundary value problem for the steady-state Perona-Malik equation, which in its main part contains a non-coercive and non-monotonic differential operator of the divergence type. Namely, the following optimal control problem is considered

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right| \end{aligned}$$

subjected to the restrictions

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) + \alpha u &= v \quad \text{в } \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ 0 \leq u(x) &\leq M \quad \text{м.с. в } \Omega, \\ v &\in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega). \end{aligned}$$

A characteristic feature of this problem is that it is formulated for a quasi-linear elliptic equation with a non-monotone and non-coercive divergent operator. As a result, the existence of solutions to the corresponding boundary value problem for each admissible control, their basic topological and functional properties require a separate study. The above circumstances make it impossible to involve known approaches to the problem of solvability of the given optimal control problem.

In this case, we propose to involve so called indirect approach to verify the existence of optimal pairs to the original problem. For this purpose, it is proposed to approximate the original problem by a set of parameterized optimization problems with fictitious controls in the coefficients of the principle divergent operator. The main advantage of the proposed approximation is the fact that the approximation problems are formulated for linear non-degenerate elliptic equations. As a result, for each value of the small parameter  $\varepsilon > 0$  such problems have a non-empty solution set.

Involving a certain generalization of the Boccardo-Murat theorem, we have shown that any sequence of optimal solutions for approximation problems is compact with respect to a certain topology, which allows to pass to the limit in the basic relations of the approximation problem. In particular, an important circumstance here is that the sequence of gradients of solutions of such problems is convergent in the pointwise sense. It is the property that made it possible to show that any cluster point of the sequence of optimal solutions of approximation problems is an optimal pair for the original problem. Thus, sufficient conditions for the solvability of the posed optimal control problem were obtained and a scheme for constructing approximations of its solutions was also given.

*Chapter 3* is devoted to the solvability issues for one class of optimal control problems for the evolutionary version of the Perona-Malik equations, and methods of their approximation. A general approach to the approximation of the solutions to given problems by parameterized problems with fictitious controls for the Cauchy-Neumann initial boundary value problems is

proposed. By analogy with the previous chapter, it is shown that each of the approximation problems is well posed, has a non-empty solution set, and any sequence formed by such solutions leads to the optimal pair for the original control problem. However, from a technical point of view, the main results of this chapter are based on a different version of the generalization of the Boccardo-Murat theorem for quasi-linear parabolic equations. In addition, it was shown that a separate sufficient condition for the solvability of the given optimal control problem is the boundedness of the chosen sequence of solutions of the approximation problems in the given topology. In fact, the fulfillment of this condition can be neglected if the set of admissible solutions for the original problem is non-empty. However, in the evolutionary case, due to the possible non-existence of global solutions, this problem remains open for nowadays. Thus, using an indirect approach, sufficient conditions were obtained for the solvability of the optimal control problem for the Peron-Malik evolutionary equation were obtained, and a scheme for approximating its solutions was also given.

*In Chapter 4* a new statement of the restoration problem for digital images which are corrupted by additive and cumulative noise is proposed in the form of an optimal control problem for a quasi-linear parabolic equation with a nonlocal  $p[u]$ -Laplacian and  $L^1$ -controls. That is, the main control object can be described as follows

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u &= f \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) &= f_0 \quad \text{в } \Omega.\end{aligned}$$

Here,

$$A_w(t, x, \nabla u) := |D(t, x, w) \nabla u|^{p_w(t, x) - 2} D(t, x, w) \nabla u.$$

A characteristic feature of the proposed formulation is that the variable order of nonlinearity  $p(t, x)$  and the anisotropic diffusion tensor  $D(t, x)$  in the principle operator of the parabolic equation are not a priori predefined, but instead these characteristics depend non-locally on the solution of the

initial-boundary value problem for the given parabolic equation. As a result,  $-\operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u$  is an example of a strongly nonlinear, nonmonotone, and noncoercive divergent operator. Therefore, the initial initial-boundary value problem, for which the optimal control problem is formulated, is ill-posed in general. Therefore, utilizing the methods of perturbation theory and the Schauder fixed point principle, it was shown that such a problem admits at least the existence of weak solutions in the variable Sobolev-Orlich space, which can be obtained as the limits of sequences of solutions of some perturbed problems. Such solutions were called  $W_0$ -attainable. In view of this, it was proposed to path from the initial optimal control problem to the study of its relaxed variant, reformulating it to search for optimal pairs on the set of  $W_0$ -attainable solutions with a weakened objective functional. As a result of such clarification, this allowed us to establish sufficient conditions for the solvability of the original optimal control problem and propose an iterative procedure for approximating optimal pairs. To illustrate the results obtained in this chapter, some model simulations with the noise-corrupted satellite images using the proposed approach are presented.

**Keywords:** optimization, optimal control, boundary value problem, Perona-Malik equation, optimality conditions, approximation of solutions, differential operators, Sobolev-Orlicz spaces, norm in variable space, embedding theorems, Lebesgue integral, white noise, Gateaux derivative.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

*Статті у наукових фахових виданнях України,  
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:*

1. Kogut, P., Kohut, Ya., Manzo, R. Fictitious Controls and Approximation of an Optimal Control Problem for Perona-Malik Equation. Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA), **30** (1), 42-70 (2022), doi: 10.15421/142202, (Scopus, Q3).
2. Kogut, P., Kohut, Ya., Parfinovych, N. Solvability Issues for Some Non-coercive and Nonmonotone Parabolic Equations Arising in the Image Denoising Problems. Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA), **30** (2), 19-48 (2022), doi: 10.15421/142207, (Scopus, Q3).

*Статті у наукових виданнях інших держав,  
які входять до міжнародних наукометричних баз даних:*

3. Kogut, P., Kohut, Ya., Manzo, R. Existence Result and Approximation of an Optimal Control Problem for the Perona-Malik Equation. Ricerche di Matematica, **73**, 1945-1962 (2024), doi: 10.1007/s11587-022-00730-4, (Scopus, Q3).
4. Kogut, P., Kohut, Ya. Optimal sparse control formulation for reconstruction of noise-affected images. Axioms, Special Issue 'Stability, Approximation, Control and Application', **12** (12), Id.1073 (2023), doi: 10.3390/axioms12121073, (Web of Science, Q1).
5. Kohut, Ya., Kupenko, O. On optimal control problem for the Perona-Malik equation and its approximation. Mathematical Control and Related Fields, **13** (4), 1466–1483 (2023), doi: 10.3934/mcrf.2022045, (Scopus, Q2).



6. Kogut, P., Kohut, Ya., Manzo, R. Some Results on Optimal Control Problem for Perona-Malik Equation, Proceedings of the 20th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 19–25 September 2022, ICNAAM 2022, Location: Rhodes, Greece.
7. Kohut, Ya., Parfinovych, N. On an optimal control problem for the Perona-Malik equation, The International Conference 'Current trends in abstract and applied analysis'. Ivano-Frankivsk, Ukraine May 12-15, 2022, p. 40.
8. Kohut, Ya., Parfinovych, N. On optimal sparse control problem for quasi-linear parabolic equation with variable order of nonlinearity, I All-Ukrainian scientific and practical conference with international participation 'Modern problems of mathematics: applied aspect', Zhytomyr, May 30, 2024.
9. Kohut, Ya. On Optimal sparse control formulation for reconstruction of noise-affected images, VII international scientific and practical conference "Modeling, control and information technology" November 7-9 2024, Rivne.

# ЗМІСТ

<b>Анотація</b>	<b>2</b>
<b>Перелік умовних позначень</b>	<b>16</b>
<b>Вступ</b>	<b>18</b>
<b>1 Попередні результати та факти</b>	<b>33</b>
1.1 Функціональні простори . . . . .	33
1.1.1 Простори Соболева, основні властивості . . . . .	35
1.1.2 Простори Орлича . . . . .	37
1.1.3 Простір функцій з обмеженою варіацією . . . . .	41
1.2 Слабка та сильна збіжності в $L^1(\Omega)$ . . . . .	43
1.3 Про поточкову збіжність ґрадієнтів розв’язків еліптичних та параболічних рівнянь . . . . .	44
1.3.1 Збіжність ґрадієнтів в еліптичному випадку . . . . .	45
1.3.2 Параболічний випадок . . . . .	46
1.4 Про слабку збіжність потоків . . . . .	48
<b>2 Задача оптимального керування для рівняння Перона-Маліка та її регуляризація</b>	<b>54</b>
2.1 Вступ . . . . .	54
2.2 Постановка задачі оптимального керування та схема її регу- ляризації . . . . .	58
2.3 Асимптотичний аналіз параметризованих задач оптимально- го керування ( $\mathcal{R}_\epsilon$ ) . . . . .	65
2.3.1 Умови оптимальності для апроксимаційних задач . . . . .	71
Висновки до розділу 2 . . . . .	75
<b>3 Про існування розв’язків та їх апроксимацію в задачі опти- мального керування для еволюційного рівняння Перона- Маліка</b>	<b>77</b>

3.1	Вступ . . . . .	77
3.2	Попередні результати . . . . .	82
3.3	Схема регуляризації вихідної задачі оптимального керування . . . . .	90
3.4	Асимптотичний аналіз регуляризованих задач оптимального керуванням $(\mathcal{R}_\varepsilon)$ . . . . .	96
	Висновки до розділу 3 . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Задача оптимального <math>L^1</math>-керування для відновлення зашумлених зображень</b>	<b>107</b>
	Задача оптимального $L^1$ -керування для відновлення зашумлених зображень . . . . .	107
4.1	Вступ та практична мотивація . . . . .	107
4.2	Попередні результати . . . . .	112
4.2.1	Змінна експонента . . . . .	112
4.2.2	Тензор анізотропної дифузії . . . . .	115
4.2.3	Простори Орлича . . . . .	117
4.2.4	Ваговий енергетичний простір із змінною експонентою . . . . .	118
4.3	Про існування розв'язків для одного класу параболічних рівнянь зі змінним порядком нелінійності . . . . .	119
4.4	Постановка задачі оптимального керування та умови її розв'язаності . . . . .	135
4.5	Апроксимація розв'язків ослабленої задачі оптимального керування . . . . .	143
	Висновки до розділу 4 . . . . .	149
	<b>Висновки</b>	<b>151</b>
	<b>Список використаних джерел</b>	<b>152</b>
	<b>Додаток А</b>	<b>161</b>
	<b>Додаток Б</b>	<b>163</b>

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\forall$  — квантор загальності.

$\exists$  — квантор існування.

$:=$  — дорівнює за означенням.

$x \in A$  — елемент  $x$  належить множині  $A$ .

$x \notin A$  — елемент  $x$  не належить множині  $A$ .

$A \cup B$  — об'єднання множин  $A$  та  $B$ .

$A \cap B$  — перетин множин  $A$  та  $B$ .

$A \subset B$  — множина  $A$  міститься у множині  $B$ .

$\emptyset$  — порожня множина.

$\mathbb{N}$  — множина натуральних чисел.

$\mathbb{R}$  — множина дійсних чисел.

$\mathbb{R}^m$  — простір точок  $t = (t_1, \dots, t_m)$ ,  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

$|A|$  — міра Лебега множини  $A$ .

$\sup_{x \in A} f(x)$  — точна верхня грань функції  $f$  на множині  $A$ .

$\inf_{x \in A} f(x)$  — точна нижня грань функції  $f$  на множині  $A$ .

$\text{ess sup}_{x \in A} f(x)$  — істотна верхня грань функції  $f$  на множині  $A$ .

$\text{ess inf}_{x \in A} f(x)$  — істотна нижня грань функції  $f$  на множині  $A$ .

$\text{sgn } \alpha$  — величина, що дорівнює 1, якщо  $\alpha > 0$ ,  $-1$ , якщо  $\alpha < 0$ , і нулю, якщо  $\alpha = 0$ .

$\chi_A$  — характеристична функція множини  $A$ .

$\text{int} A$  — внутрішність множини  $A$ .

$\partial A$  — межа множини  $A$ .

$\|x\|_{L^p(G)} := \left( \int_G |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$ , де  $p \in [1, \infty)$  та  $x: G \rightarrow \mathbb{R}$  — інтегровна в степені  $p$  за Лебегом на множині  $G$  функція.

$L^p(G)$ ,  $p \in [1, \infty)$  — простір функцій  $x: G \rightarrow \mathbb{R}$  зі скінченною нормою  $\|x\|_{L^p(G)}$ .

$\|x\|_{L^\infty(G)} := \text{ess sup}_{t \in G} |x(t)|$ , де  $x: G \rightarrow \mathbb{R}$  — вимірна на  $G$  функція.

$L^\infty(G)$  — простір істотно обмежених функцій  $x: G \rightarrow \mathbb{R}$ .

$W^{1,p}(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$  — простір Соболева функцій  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  таких, що

$f$  та усі її (узагальнені) частинні похідні належать  $L^p(G)$ .

- $W_0^{1,p}(\Omega)$  — простір Соболева, який утворений замиканням класу  $C_0^\infty(\Omega)$  за нормою простору  $W^{1,p}(\Omega)$ . Отже це підпростір простору  $W^{1,p}(\Omega)$ , елементи якого мають нульовий слід на межі  $\partial\Omega$ .
- $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$  — гільбертів простір з операцією скалярного добутку

$$(f, g)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla f, \nabla g)_{\mathbb{R}^N} dx.$$

- $H^{-1}(\Omega)$  — дуальний простір до простору  $H_0^1(\Omega)$ .
- $W^{-1,q}(\Omega)$  — дуальний простір до простору  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W^{-1,q}(\Omega); W_0^{1,p}(\Omega)}$  — операція дуального спарювання між елементами просторів  $W^{-1,q}(\Omega)$  та  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Дослідження будь-якої задачі оптимізації чи оптимального керування для рівнянь в частинних похідних, як правило, починається із перевірки факту щодо її розв'язаності. Зазвичай є декілька основних причин, чому задача оптимального керування може не мати розв'язків. Однією з них є те, що множина її допустимих розв'язків може виявитися порожньою, оскільки об'єкт керування може являти собою погано обумовлену (некоректну за Адамаром) задачу математичної фізики. Ще однією причиною є незамкненість множини допустимих її розв'язків, оскільки в цьому випадку мінімізаційні послідовності можуть в границі прямувати до розв'язку, який не є допустимим для обраної задачі. Як показали К.Лур'є та F.Murat в 1970х роках, остання ситуація є типовою для більшості задач оптимізації, де коефіцієнти головної частини дифергентного оператора розглядаються в якості керувань. І, насамкінець, відсутність оптимальних розв'язків в таких задачах може бути спричинена тим, що залежність розв'язків крайових задач від функцій керування не є неперервною відносно топології, в якій множини допустимих пар є компактними. Власне, окреслені обставини являють собою не лише суттєву теоретичну проблему, але також є вельми обмежливими з точки зору практичних застосувань.

Ще одним важливим аспектом в дослідженні задач оптимального керування для рівнянь в частинних похідних є розробка схем та методів апроксимації таких задач, при яких всі чи лише деякі їх оптимальні розв'язки можна апроксимувати із заданою точністю розв'язками інших оптимізаційних задач, що є значно простішими з точки зору їх практичної реалізації. Зазвичай апроксимаційними задачами можуть виступати параметризовані задачі оптимального керування, які маєть єдиний розв'язок та формулюються для коректно поставлених початково-крайових задач математичної фізики.

Основи досліджень в цій тематиці було закладено в роботах багатьох відомих математиків, зокрема значний вклад внесли такі відомі науковці як

Ж. Алейр, В. Барбю, А. Бенсусан, Дж. Бутаццо, М. Дельфур, Ж.-П. Золе-сіо, Е. Зюазюа, О.І. Єгоров, Е. Казас, В. Коробов, Ж.-М. Корон, К. Куніш, І. Лазецька, Ж.-Л. Ліонс, В.С. Мельник, Ж. Папаніколау, В. Плотніков, А.В. Фурсіков, В.М. Тіхоміров, К. Тріджіані, Д. Чіоранеску та багато інших.

Проте означені вище проблеми, які пов'язані з дослідженням задач оптимального керування для рівнянь в частинних похідних, значно ускладнюються, якщо об'єктом керування виступає задача математичної фізики для рівнянь з виродженими операторами дивергентного типу. Зокрема йдеться про виродженість в коефіцієнтах еліптичних операторів та операторів типу  $p$ -лапласіана. Добре відомо, що такої ситуації легко уникнути, якщо припустити наявність обмежень знизу на коефіцієнти, які б відділяли їх від нуля. Проте ефект виродження може бути продиктованим абсолютно природніми обставинами, особливо в задачах обробки зображень, де подібні припущення є недоречними. В результаті, відповідні оператори дивергентного типу можуть втрачати властивості коерцитивності та неперервності. Отже для таких задач математичної фізики може мати місце ефект Лаврент'єва, неєдиність слабких розв'язків, та існування сингулярних (або неваріаційних) розв'язків. Як наслідок, дослідження відповідних задач оптимального керування набуває нетривіального звучання. Ці та близькі задачі досліджувалися багатьма математиками, серед яких М. Бокало, Ч. Дапіче, У. Демаіо, Ол. Капустян, П. Когут, Е. Казас, О. Купенко, Г. Льогерінг, Т. Орсен, Я. Соколовський, О. Станжицький, О. Хлуднєв та інші.

Одним із основних об'єктів інтересу даної роботи виступають задачі керування для рівнянь типу Перона-Маліка та їх узагальнення. Власне цей тип рівнянь, який вперше був запропонований в 1987 році в роботі [71], є прикладом нелінійного рівняння дифузійного типу з неоднорідним виродженим коефіцієнтом в дивергентному операторі. Саме цей тип рівнянь широко використовується в задачах обробки зображень для таких цілей, як згладжування, відновлення, сегментація, фільтрація та виявлення контур-

ності. Основна специфіка рівняння Перона-Маліка полягає в тому, щоб залучити до обробки зображень модифіковане рівняння теплопереносу шляхом введення спеціального коефіцієнта дифузії, який би залежав від просторової поведінки зображення. Для цього цей коефіцієнт в кожній точці області пов'язується з нормою локального градієнта зображення так, щоби при невеликих нормах градієнта (тобто в однорідних областях) значення коефіцієнта дифузії були б великими для більш сильного згладжування. Разом з тим, в тих точках області, де норма градієнта є великою (тобто має місце просторова неоднорідність), коефіцієнт дифузії має бути меншим, аби уповільнити процес розмиття та зберегти нерозмитою контурність таких зображень. Така модифікація рівнянь теплопереносу приводить до того, що рівняння Перона-Маліка втрачають коерцитивність та можуть не мати глобальних слабких розв'язків у просторі  $C^1$  (див. [21, 39]). Разом з тим, має місце такий парадокс [40]: якою б не була модель на базі рівняння Перона-Маліка, вона є погано обумовленою задачею математичної фізики. Проте, її дискретизація за явною схемою Ейлера є завжди стійкою. Пояснення цього парадоксу є досить несподіваним [80]: для таких рівнянь стандартна дискретизація на базі скінченних різниць завжди породжує ефект регуляризації. В цьому контексті варто зазначити, що на фоні значного практичного і теоретичного інтересу до рівнянь Перона-Маліка, практично відсутні роботи, які б були присвячені задачам оптимізації для таких об'єктів.

З огляду на сказане вище, задачі оптимального керування для рівнянь типу Перона-Маліка та розробка методів їх апроксимації є актуальною тематикою в сучасній теорії оптимізації і потребують подальших досліджень.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетною темою НДР-1-666-22 "Теоретичні та прикладні аспекти відновлення операторів та оптимізації наближення функцій" № державної реєстрації 0122U001223.



**Мета і завдання дослідження.** *Метою* роботи є доведення теорем існування для одного класу задач оптимального керування для рівнянь типу Перона-Маліка, побудова схем їх апроксимації у вигляді параметричної сім'ї оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного оператора дивергентного типу, доведення теорем про збіжність запропонованих наближень до розв'язків вихідних задач, та обґрунтування необхідних умов оптимальності для апроксимаційних задач.

*Об'єктом дослідження* є задачі оптимального керування для стаціонарного та еволюційного варіантів рівняння Перона-Маліка та його узагальнення до квазілінійного параболічного рівняння з змінним порядком нелінійності в операторі дивергентного типу.

*Предметом дослідження* є проблема існування розв'язків задач оптимального керування для рівнянь типу Перона-Маліка та побудова схем їх апроксимації.

Для реалізації поставленої мети у роботі було поставлено такі *завдання*:

- Дослідити проблему розв'язаності одного класу задач оптимального керування для стаціонарного рівняння Перона-Маліка з крайовими умовами Неймана на межі області.
- Запропонувати варіант апроксимації задачі оптимального керування стаціонарним рівнянням Перона-Маліка виходячи з принципу фіктивних керувань.
- Одержати та обґрунтувати необхідні умови оптимальності для апроксимаційних задач.
- Довести, що розв'язки апроксимаційних задач в границі прямують до оптимальної пари вихідної задачі керування.
- Розглянути попередні пункти по відношенню до задачі оптимального керування для еволюційного варіанту рівняння Перона-Маліка.

- Навести постановку задачі відновлення цифрових зображень у вигляді задачі оптимального керування для узагальненого рівняння Перона-Маліка з змінним показником нелінійності.
- Дослідити проблему існування розв'язків в задачі відновлення цифрових зображень.
- Запропонувати схему релаксації задачі відновлення цифрових зображень та дослідити її розв'язаність.
- Дослідити питання апроксимації розв'язків в задачі відновлення цифрових зображень.

**Методи дослідження.** В роботі використовуються сучасні методи нелінійного функціонального аналізу, варіаційні методи математичної фізики, та методи теорії варіаційної збіжності задач умовної мінімізації.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Результати роботи є новими, і полягають у такому:

- Отримано достатні умови розв'язаності одного класу задач оптимального керування для стаціонарного рівняння Перона-Маліка з крайовими умовами Неймана на межі області.
- Запропонована схема апроксимації задачі оптимального керування для стаціонарного рівняння Перона-Маліка, яка ґрунтується на залученні параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного еліптичного оператора. А також показано, що кожна з апроксимаційних задач має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, що утворена такими розв'язками, є компактною у відповідній топології і кожна її кластерна точка є оптимальною парою для вихідної задачі.
- Отримано необхідні умови оптимальності для апроксимаційних задач та проведено їх строге обґрунтування.

- Отримано достатні умови розв'язаності задачі оптимального керування для еволюційного рівняння Перона-Маліка та запропонована схема її апроксимації, яка ґрунтується на залученні параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного оператора. Доведено, що кожна з апроксимаційних задач має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, яка утворена такими розв'язками, є компактною у відповідній топології і кожна її кластерна точка є оптимальною парою для вихідної задачі.
- Наведено схему побудови необхідних умов оптимальності для апроксимаційних задач до задачі оптимального керування для еволюційного рівняння Перона-Маліка та проведено їх строгі обґрунтування.
- З метою відновлення цифрових зображень, які пошкоджені аддитивним та імпульсним шумом, запропоновано нову модель у формі задачі оптимального керування на класі розріджених керувань для квазілінійного параболічного рівняння зі змінним порядком нелінійності та виродженим тензором анізотропної дифузії, які нелокально залежать від розв'язку початково-крайової задачі.
- Для початково-крайової задачі Коші-Неймана для квазілінійного параболічного рівняння з нелокальним  $p[u]$ -лапласіаном введено поняття  $W_0$ -досяжних слабких розв'язків та отримано достатні умови їх існування.
- Наведено варіант для релаксації задачі відновлення цифрових зображень, отримано достатні умови її розв'язаності, та запропоновано схему її апроксимації для релаксованої задачі оптимального керування і показано, що оптимальні пари для такої задачі можна наблизити розв'язками відповідних апроксимаційних задач.

**Практичне значення одержаних результатів.** Робота носить теоретичний характер. Отримані результати та розроблені схеми апроксимації можуть бути використані при розв'язанні практичних задач з обробки

цифрових зображень, що підтверджується модельними розрахунками, які наведені в додатку.

**Особистий внесок здобувача.** Результати роботи опубліковано у 5-х статтях, що написані у співавторстві. Ідея дослідження задач оптимального керування для рівнянь Перона-Маліка, належить професору Н.В. Парфінович. У статті [1] (див. Список публікацій здобувача) здобувач брав участь у виборі схеми апроксимації поставленої задачі та довів ключову теорему 11 про існування оптимальної пари для вихідної задачі, а також провів докладне доведення низки інших основних результатів. У статті [2] здобувачеві належить перевірка умов теореми Шаудера про нерухому точку, а також доведення теореми 3.7. У статті [3] здобувачеві належить ідея застосування результатів Боккардо про поточкову збіжність градієнтів до обґрунтування схеми апроксимації оптимальних розв'язків для параболічного варіанту рівнянь Перона-Маліка. У статті [4] здобувачеві належить доведення ключового результату (див. теорему 3) щодо топологічних властивостей множини допустимих розв'язків. У статті [5] здобувачеві належать ідеї, які дозволили залучити непрямий підхід (через фіктивні керування) до доведення теореми існування оптимальних пар в задачі керування стаціонарним рівнянням Перона-Маліка.

#### **Апробація результатів дисертації.**

За результатами дисертаційної роботи було зроблено доповіді на:

- the 20th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2022, (19–25 September 2022, Rhodes, Greece;
- International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", (May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine);
- The First All-Ukrainian scientific and practical conference with international participation "Modern problems of mathematics: applied aspect", (Zhytomyr, May 30, 2024);
- VII International scientific and practical conference "Modeling, control and information technologies", (Rivne, October, 2024).

Результати роботи також доповідались на семінарах:

– Кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Дніпро, неодноразово протягом 2022–2024 років, (керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Н. В. Парфінович);

– Department of Information Engineering, Electrical Engineering and Applied Mathematics, University of Salerno, (керівник семінару: Prof. C.D'Apice);

– Кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, (співкерівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О.В. Капустян).

**Публікації.** Всі статті [1–5] зі Списку публікацій здобувача опубліковано у журналах, що входять до наукометричної бази Scopus. Відповідно до класифікації Scimago Journal & Country Rank, стаття [4] опублікована у виданні квартилю Q1 (див. посилання <https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:001130850400001>), стаття [2] опублікована у виданні квартилю Q2 (див. посилання [https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=21100256977tip=sidexact=no#google\\_vignette](https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=21100256977tip=sidexact=no#google_vignette)), статті [1–3] опубліковані у виданнях квартилю Q3. Решта джерел — це тези доповідей.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків і переліку використаних джерел. Повний обсяг роботи складає 164 сторінок.

## ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* дисертаційної роботи зроблено наступне:

1. Визначено об'єкт та предмет дослідження.
2. Обґрунтовано актуальність теми дисертації та підкреслено важливість таких досліджень для сучасної науки та практики.
3. Сформульовано мету та завдання дослідження, які здобувач ставить перед собою.
4. Описано основні підходи та методи дослідження, які залучалися під час роботи над дисертацією.
5. Охарактеризовано наукову та практичну новизну проведених досліджень.
6. Описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

В *першому розділі* наводиться перелік відомих результатів та фактів з функціонального аналізу та теорії рівнянь в частинних похідних, які пропонується залучити для проведення запланованих досліджень за темою дисертації. Наведено також перелік основних першоджерел, результати яких послужили основою для даного розділу.

*Другий розділ* присвячено дослідженню одного класу задач оптимального керування для нелінійного еліптичного рівняння Перона-Маліка, яке має виродження в головній частині диференціального оператора. Основні результати цього розділу опубліковано у статті [2].

Оскільки ключовим об'єктом керування в цьому розділі виступає рівняння Перона-Маліка, то варто спинитися на природі цього рівняння та його практичних застосуваннях. Добре відомо, що рівнянням дифузії називають рівняння в частинних похідних, яке описує розподіл певної субстанції в заданому середовищі на основі класичних законів фізики. Зазвичай це рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \nabla (C(u, x, t) \nabla u(x, t)), \quad (1)$$

де функцію  $C$  називають коефіцієнтом дифузії, який може бути як скалярною функцією координат області (що характеризує неоднорідність середовища) так і набувати форму тензора (що описує анізотропні властивості

такого середовища). Ясно, що таке рівняння стає нелінійним, якщо коефіцієнт дифузії залежить від концентрації  $u$ . Разом з тим, якщо  $C = 1$ , то отримуємо класичну модель тепло-масо переносу, яку можна подати у вигляді такої задачі Коші

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3)$$

Легко перевірити, що для будь-якої функції  $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ , єдиний розв'язок задачі Коші (2)–(3) можна подати у вигляді

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) G(x - y, t) dy = f * G, & t > 0, \\ f(x), & t = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де функція  $G$  має вигляд

$$G(x, t) = \frac{\exp(-|x|^2/4t)}{2^N(\pi t)^{N/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0. \quad (5)$$

З (4) видно, що розв'язок рівняння теплопровідності являє собою згортку початкового розподілу температури з функцією Гауса з параметром стандартного відхилення  $\sigma = 2t$ . Така операція добре відома в Image Processing як ефективна спектральна фільтрація низько частотних складових в функції  $f \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  і її зазвичай використовують для згладжування цифрових зображень шляхом усереднення їх значень у певному околі. Власне цей факт і послужив основною ідеєю для залучення рівнянь дифузії до обробки зображень. Проте практичне використання такої моделі має один суттєвий недолік: її використання в задачах обробки зображень призводить до небажаного розмиття тих частин зображення, де містяться краї, контури та інші межі. Власне ідея Р. Perona та J. Malik'а полягала в модифікації рівняння теплопереносу шляхом залучення такого коефіцієнта дифузії, який би залежав від текстурної складової самого зображення. Для цього було запропоновано пов'язати коефіцієнт дифузії з локальною поведінкою градієнта зображення. А саме, якщо норма градієнта в заданій точці

є незначною (тобто мова іде про зону однорідності в такому зображенні) то коефіцієнту дифузії приписуються великі значення для більш сильного згладжування в цій області. Проте в тих місцях, де норма градієнта є великою (це околиці контурів, меж, країв) варто очікувати меншої дифузії, щоб уповільнити процес дифузії та зберегти чіткими контурні особливості зображення. Отже, в загальному випадку початково-крайову задачу Перона-Маліка можна подати у вигляді такої задач Коші-Неймана

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \nabla (C(|\nabla u|^2) \nabla u(x, t)), \quad \text{в } x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} = 0, \quad \text{на } x \in \partial\Omega, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{в } x \in \Omega. \quad (8)$$

При цьому типовими прикладами вибору функції  $C$  є такі варіанти

$$C(s^2) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + s^2}, \quad C(s^2) = \exp(-s^2/\lambda^2)$$

при деякому заданому  $\lambda > 0$ .

Як видно з (6), оператор  $-\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1+|\nabla u|^2} \right)$  не є ні монотонним ані коерцитивним. Це типовий приклад оператора дивергентного типу з сильним типом виродження і для якого не виконуються стандарні на сьогодні припущення щодо поведінки вагового множника  $\rho(x, t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + |\nabla u(x, t)|^2}$  (див., наприклад, [50, 52, 83]). Власне ця обставина і послужила основною мотивацією для дослідження рівнянь Перона-Маліка як об'єктів керування, а саме, в другому розділі розглядається така задача оптимального керування для стаціонарного варіанту рівняння Перона-Маліка:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \\ & + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right| \end{aligned} \quad (9)$$

за наявності обмежень

$$-\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) + \alpha u = v \quad \text{в } \Omega, \quad (10)$$

$$\partial_{\nu} u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (11)$$



$$0 \leq u(x) \leq M \quad \text{м.с. в } \Omega, \quad (12)$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega). \quad (13)$$

Зрозуміло, що ця задача є змістовною лише за умови, коли множник  $1/(1+|\nabla u|^2)$  є функцією з обмеженою варіацією. Проте навіть в цьому випадку існування розв'язків такої задачі залишається нетривіальним питанням.

Ключовою ідеєю доведення проблеми розв'язаності такої задачі послужив метод фіктивних керувань в поєднанні з процедурою апроксимації вихідної задачі сукупністю параметризованих задач для об'єктів з більш простою структурою. А саме, замість рівняння (10) пропонується розглянути лінійне еліптичне рівняння

$$-\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \alpha u = v \quad \text{в } \Omega$$

в якому функція  $\rho \in BV(\Omega)$  виступає фіктивним керуванням. А щодо функціоналу вартості (9), то він замінюється на збурений функціонал вигляду

$$(\mathcal{R}_\varepsilon) \quad \text{Мінімізувати } J_\varepsilon(\rho, v, u) = J(v, u) + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \left| \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right|^2 dx$$

де  $\varepsilon > 0$  є малим параметром.

На цьому шляху було показано, що кожна із збурених задач оптимального керування має непорожню множину розв'язків і будь-яка їх послідовність відносно параметра  $\varepsilon > 0$  в границі при  $\varepsilon \rightarrow 0$  прямує до пари, що є оптимальною для вихідної задачі керування. Тим самим було доведено факт розв'язаності задачі оптимального керування (9)–(13), а також показано що деякі з її оптимальних пар можна наблизити розв'язками задач з фіктивними керуваннями. Насамкінець, для збурених задач були отримані необхідні умови оптимальності та неведено їх строге обґрунтування.

*Третій розділ* присвячено питанням існування розв'язків наступної задачі оптимального керування для еволюційної версії рівнянь Перона-Маліка

$$(\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |u(T) - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx dt +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\omega} |v|^2 dx dt + \int_{Q_T} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right| \quad (14)$$

за наявності таких обмежень

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) = v \chi_{\omega} \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \quad (15)$$

$$\partial_{\nu} u = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (16)$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (17)$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad (18)$$

В ідейному плані цей розділ мало чим відрізняється від розділу 2. Тут також залучається метод фіктивних керувань в поєднанні з процедурою апроксимації вихідної задачі сукупністю параметризованих задач для об'єктів з більш простою структурою. Разом з тим, з технічної точки зору цей розділ є більш складним, оскільки вимагає залучення іншої техніки для обґрунтування. Зокрема, ключовим кроком в доведенні збіжності оптимальних розв'язків збурених задач до оптимальної пари задачі (14)–(18) послужили результати роботи [16], де автори встановили досить тонку властивість для градієнтів параметризованих початково-крайових задач, а саме їх поточкову збіжність. Як і в попередньому розділі, тут доведено теорему про розв'язанність задачі (14)–(18) та показано, що деякі з її оптимальних пар можна наблизити розв'язками апроксимаційних задач для лінійних параболічних рівнянь.

У *четвертому розділі* розглядається задача оптимального керування для квазі-лінійного параболічного рівняння, розв'язки якої пропонується розглядати як результат відновлення зображення, яке пошкоджене аддитивним та кумулятивним шумом. Параболічне рівняння, що є базовою складовою такої постановки, можна тлумачити як певне узагальнення еволюційного рівняння Перона-Маліка. Хоча таке рівняння не є формально виродженим, його характерною відмінністю є специфічний тип нелінійності змінного порядку, який нелокально залежить від розв'язку самої задачі. Отже, ані тензор анізотропної дифузії  $D_u(t, x)$  ні показник нелінійності

$p_u(t, x)$  не є а priori заданими, а можуть мінятися в залежності від поведінки градієнта розв'язку  $u$ . В результаті постає нетривіальною проблемою питання щодо існування розв'язків відповідної початково-крайової задачі, оскільки зроблені в даній дисертації припущення не гарантують збіжність послідовності апроксимативних за Гальоркіним наближень. Отже, стандартна схема доведення існування слабких розв'язків стає непридатною. Натомість, в недавній роботі [10] було запропоновано перейти до побудови сильних розв'язків таких задач, які б вирізнялися додатковою регулярністю  $u_t \in L^2(Q_T)$ . Разом з тим, існування таких розв'язків є можливим лише за виконання двосторонньої нерівності

$$\frac{2N}{2+N} < p^- \leq p^+ < 2, \quad (19)$$

в якій  $[p^-, p^+]$  є діапазоном можливих значень для змінного показника нелінійності.

Оскільки виконання умови (19) є сумнівним в нашому випадку, то для обраної початково-крайової задачі Коші-Неймана для квазілінійного параболічного рівняння з нелокальним  $p_u(t, x)$ -лапласіаном було введено поняття  $W_0$ -досяжних слабких розв'язків та отримано достатні умови їх існування. Такі розв'язки пропонується розуміти як границі послідовності слабких розв'язків спеціально сконструйованих апроксимаційних задач. Показано, що кожному допустимому керуванню відповідає принаймні один  $W_0$ -досяжний слабкий розв'язок. Разом з тим, для розв'язаності відповідної задачі оптимального керування цього виявилось не досить, оскільки запропонований функціонал якості, незважаючи на його природну сутність, може втрачати ключову властивість напівнеперервності знизу. Отже вихідна задача оптимального керування є погано обумовленою і вона потребує певної релаксації.

В зв'язку з цим в четвертому розділі було запропоновано один варіант для релаксації вихідної задачі та показано, що в цьому випадку множина оптимальних розв'язків не є порожньою. На завершення розділу, розглянуто питання щодо апроксимації релаксованої задачі оптимального керу-

вання та показано, що оптимальні пари для такої задачі можна наблизити розв'язками відповідних апроксимаційних задач.

## РОЗДІЛ 1

### Попередні результати та факти

В цьому розділі наводиться перелік відомих результатів та фактів з функціонального аналізу та теорії рівнянь в частинних похідних, які будуть залучені для проведення подальшого аналізу за темою дисертації. В якості основних першоджерел для даного розділу послужили матеріали таких публікацій [7, 12, 16, 23, 30, 31, 60, 69, 72, 75, 83, 84].

#### 1.1. Функціональні простори

Нехай  $\xi \in \mathbb{R}^N$  та  $\eta \in \mathbb{R}^N$  є довільними векторами, Через  $(\xi, \eta) = \xi^t \eta$  позначимо їх скалярний добуток в  $\mathbb{R}^N$ , де  $^t$  є оператором транспонування. Тоді норма  $|\xi|$  визначається як  $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ .

Нехай  $\Omega$  є довільною обмеженою відкритою підмножиною  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) з достатньо гладкою межею. Надалі будемо вважати, що одинична зовнішня нормаль  $\nu = \nu(x)$  є добре означеною для  $\mathcal{H}^{N-1}$ -м.в.  $x \in \partial\Omega$ , де скорочення  $\mathcal{H}^{N-1}$ -м.в. означає 'майже для всіх' по відношенню до  $(N-1)$ -вимірної міри Хаусдорфа  $\mathcal{H}^{N-1}$ . Для довільної множини  $D \subset \Omega$  позначатимемо через  $|D|$  її  $N$ -вимірну міру Лебега  $\mathcal{L}^N(D)$ . Для визначення діаметру множини  $\Omega$  скористаємося правилом  $\text{diam } \Omega = \sup_{x,y \in \Omega} |x - y|$ .

Нехай  $X$  є довільним банаховим простором над полем дійсних чисел і нехай  $\|\cdot\|_X$  є нормою в цьому просторі. Нехай далі  $X'$  означає дуальний простір до простору  $X$ . Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  позначатимемо операцію дуального спарювання на  $X' \times X$ , а через  $\rightarrow$  та  $\xrightarrow{*}$  — слабку та  $*$ -слабку збіжності в нормованих просторах, відповідно.

Для довільного сепарабельного банахового простору  $Y$ , позначимо через  $C([0, T]; Y)$  простір усіх неперервних функцій з  $[0, T]$  в  $Y$ .

Функцію  $u : [0, T] \rightarrow Y$  називають вимірною за Лебегом, якщо знай-

деться послідовність кусково сталих функцій  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  таких, що

$$u_k = \sum_{j=1}^{n_k} a_j^k \chi_{A_j^k}$$

для скінченного числа  $n_k$  борелевих підмножин  $A_j^k \subset [0, T]$ , де  $a_j^k \in Y$ , і ця послідовність збігається до  $u$  майже скрізь відносно лебегової міри на  $[0, T]$ . Тоді  $L^p(0, T; Y)$  при  $1 \leq p < \infty$  є простором усіх вимірних функцій  $u : [0, T] \rightarrow Y$  таких, що

$$\|u\|_{L^p(0, T; Y)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_Y^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Щодо простору  $L^\infty(0, T; X)$ , то він є простором усіх вимірних функцій, для яких

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Таким чином,  $L^p(0, T; X)$  є банаховим простором і дуальним до нього є  $L^{p'}(0, T; X')$ , де  $p' = p/(p-1)$ . Зокрема, для функцій  $f \in L^2(0, T; L^1(\Omega))$  має місце включення  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , оскільки за нерівністю Мінковського справедливо

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(0, T; L^1(\Omega))} &:= \left( \int_0^T \left( \int_\Omega |f| dx \right)^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \int_\Omega \left( \int_0^T |f|^2 dt \right)^{1/2} dx =: \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Отже, можна вважати, що вкладення  $L^2(0, T; L^1(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0, T; L^2(\Omega))$  є неперервним. Більше деталей щодо таких просторів можна знайти в [30].

Для заданого  $1 \leq p < +\infty$ , простір  $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$  означимо за правилом

$$L^p(\Omega; \mathbb{R}^N) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N : \|f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)} < +\infty\},$$

де  $\|f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)} = \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ . Скалярний добуток двох функцій  $f$  та  $g$  в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$  дається правилом

$$(f, g)_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)} = \int_\Omega (f(x), g(x)) dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^N f_k(x) g_k(x) dx.$$

### 1.1.1. Простори Соболева, основні властивості

Позначимо через  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  локально опуклий простір всіх функцій з компактними носіями, які є диференційованими необмежену кількість разів. За аналогією покладемо  $C_0^\infty(\Omega)$  для функцій, носій яких є компактною підмножиною  $\Omega$ . Означимо банахів простір Соболева  $W^{1,p}(\Omega)$  з показником інтегрованості  $p \geq 1$  як замикання  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  відносно норми

$$\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (y^p + |\nabla y|^p) dx \right)^{1/p}.$$

Означимо також простір  $W_0^{1,p}(\Omega)$  як замикання  $C_0^\infty(\Omega)$  відносно норми  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ . Якщо  $p = 2$ , то простір  $W_0^{1,2}(\Omega)$  є гільбертовим і позначатимемо його як  $H_0^1(\Omega)$ . У випадку  $p = 2$ , залучатимемо також позначення  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ . Нехай всюди далі  $H^1(\Omega; \partial\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ .

Через  $(W^{1,p}(\Omega))'$  будемо позначати дуальний до  $W^{1,p}(\Omega)$  простір. Мають місце такі відомі результати:

- Нехай  $p \geq 1$ . Тоді знайдеться стала  $C$ , яка залежить від  $\Omega$ ,  $N$  та  $p$  така, що

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

- Нехай  $1 \leq p < N$  і нехай  $p^* = \frac{Np}{N-p}$ , де  $p^*$  називається експонентою вкладення Соболева. Тоді знайдеться стала  $S_p$  (залежна лише від  $N$  та  $p$ ) така, що

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq S_p \|\nabla u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega);$$

- Нехай  $1 \leq p < N$  і нехай  $1 \leq q < p^*$ . Тоді вкладення  $W^{1,p}(\Omega)$  в  $L^q(\Omega)$  є компактним;
- Оскільки вкладення  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  є неперервним та щільним, то

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset (H_0^1(\Omega))' = H^{-1}(\Omega);$$

- З неперервності вкладення  $W_0^{1,p}(\Omega)$  в  $L^{p^*}(\Omega)$  випливає, що вкладення  $(L^{p^*}(\Omega))' = L^{p_*}(\Omega)$  в  $(W_0^{1,p}(\Omega))' = W^{-1,p'}(\Omega)$  є неперервним при  $p' = \frac{p}{p-1}$  і  $p_* = \frac{Np}{Np-N+p}$ .

В подальшому аналізі важливу роль буде відігравати відома теорема вкладення Gagliardo-Nirenberg'a (див. [68, Lecture II]). Щодо інших результатів в цій області, можна скористатися такими посиланнями [12, 60, 69, 75]).

**Теорема 1.1.1** (Gagliardo-Nirenberg). *Нехай функція  $v$  належить множині  $W^{1,q}(\Omega) \cap L^\rho(\Omega)$ , в якій  $q \geq 1$ ,  $\rho \geq 1$ . Тоді знайдеться додатна стала  $C$ , яка залежить від  $N$ ,  $q$ , та  $\rho$ , така, що*

$$\|v\|_{L^\gamma(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)}^\theta \|v\|_{L^\rho(\Omega)}^{1-\theta},$$

для всіх  $\theta$  і  $\gamma$ , які задовольняють умови

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad 1 \leq \gamma \leq +\infty, \quad \frac{1}{\gamma} = \theta \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{N} \right) + \frac{1-\theta}{\rho}. \quad (1.1)$$

Як наслідок цього твердження, має місце такий результат.

**Наслідок 1.1.1.** *Нехай  $v \in L^\alpha(0, T; W^{1,\alpha}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  при  $\alpha = 1 + \delta$ , де  $0 < \delta \ll 1$ . Тоді  $v \in L^\gamma(Q_T)$  з  $\gamma = \alpha \frac{N+2}{N}$  і при цьому*

$$\|v\|_{L^\gamma(Q_T)} \leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{\frac{2}{N+2}} \|\nabla v\|_{L^\alpha(0,T;L^\alpha(\Omega))}^{\frac{N}{N+2}}. \quad (1.2)$$

*Доведення.* Взявши  $q = \alpha$ ,  $p = 2$ , і  $\theta = \frac{N}{N+2}$ , бачимо, що умови (1.1) диктують такі рівності

$$\gamma = \frac{(N+2)\alpha}{N}, \quad \gamma\theta = \alpha, \quad \gamma(1-\theta) = \frac{2\alpha}{N}.$$

Тоді, за нерівністю Gagliardo-Nirenberg'a, можемо записати

$$\|v(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma = \int_\Omega |v(t, x)|^\gamma dx \leq C \|\nabla v(t)\|_{L^\alpha(\Omega; \mathbb{R}^N)}^{\theta\gamma} \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^{(1-\theta)\gamma}.$$

Отже

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |v(t)|^\gamma dx dt &\leq C \int_0^T \|\nabla v(t)\|_{L^\alpha(\Omega; \mathbb{R}^N)}^\alpha \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2\alpha}{N}} dt \\ &\leq C \|v\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^{\frac{2\alpha}{N}} \int_0^T \|\nabla v(t)\|_{L^\alpha(\Omega; \mathbb{R}^N)}^\alpha dt. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В результаті анонсована нерівність (1.2) випливає з (1.3).  $\square$



На завершення цього підрозділу наведемо відомий результат функціонального аналізу про регулярність композицій функцій з простору Соболева  $H^1(\Omega)$  з ліпшиць-неперервною функцією  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Зокрема, якщо ліпшиць-неперервна функція  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є такою, що  $G(0) = 0$  і  $u$  належить простору  $H^1(\Omega)$ , то  $G(u)$  належить  $H^1(\Omega)$  і при цьому  $\nabla G(u) = G'(u)\nabla u$  майже скрізь в  $\Omega$ . Отже, поклавши  $G(s) = T_k(s)$ , де  $T_k(s) = \max\{-k, \min\{s, k\}\}$  а  $k > 0$  є заданою пороговою величиною, отримаємо

$$\nabla T_k(u) = \nabla u \chi_D\{|u| \leq k\} \quad \text{майже скрізь в } \Omega.$$

### 1.1.2. Простори Орлича

Нехай  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  є обмеженою зв'язною відкритою множиною з достатньо регулярною межею  $\partial\Omega$ , нехай  $T > 0$  є заданим додатнім числом. Покладемо  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ . Нехай відображення  $p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  є таким, що

$$1 < p^- \leq p(t, x) \leq p^+ = 2 \quad \text{м.с. в } Q_T. \quad (1.4)$$

Надалі функцію  $p(t, x)$  будемо називати змінним показником інтегрованої (або коротко, змінною експонентою). Покладемо  $p'(t, x) = \frac{p(t, x)}{p(t, x) - 1}$  для спряженої експоненти. Тоді

$$2 = \underbrace{\frac{p^+}{p^+ - 1}}_{(p^+)'} \leq p'(t, x) \leq \underbrace{\frac{p^-}{p^- - 1}}_{(p^-)'} \quad \text{м.с. в } Q_T, \quad (1.5)$$

де через  $(p^-)'$  та  $(p^+)'$  позначено спряжені величини до  $p^-$  та  $p^+$ , відповідно.

Позначимо через  $L^{p(\cdot)}(Q_T)$  множину всіх вимірних функцій  $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  таких, що

$$\rho_{p(t, x)}(f) := \int_{Q_T} |f(t, x)|^{p(t, x)} dx dt < \infty.$$

Тоді  $L^{p(\cdot)}(Q_T)$  є рефлексивним сепарабельним банаховим простором відносно норми Люксембурга (див. [23, 31])

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{Q_T} |\lambda^{-1} f(t, x)|^{p(t, x)} dx dt \leq 1 \right\}. \quad (1.6)$$

Простір  $L^{p(\cdot)}(Q_T)$  є певним різновидом Musielak-Orlicz проторів, що узагальнюють простори Лебега. В зв'язку з цим, багато його властивостей наслідують властивості класичних лебегових просторів. Зокрема, двостороння оцінка (1.5) гарантує щільність множини  $C_0^\infty(Q_T)$  в  $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ , а також той факт, що  $L^\infty(Q_T) \cap L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$  є також щільною підмножиною  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$ .

Дуальним до нього є простір  $L^{p'(\cdot)}(Q_T)$ , тобто будь-який лінійний неперервний функціонал  $F = F(f)$  над  $L^{p(\cdot)}(Q_T)$  має вигляд (див. [83, Лема 13.2])

$$F(f) = \int_{Q_T} fg \, dxdt, \quad \text{з } g \in L^{p'(\cdot)}(Q_T).$$

Співвідношення між модулярною функцією  $\rho_{p(t,x)}(f)$  та нормою (1.6) не є таким прямим як в класичних лебегових просторах. Разом з тим можна показати, що мають місце такі нерівності

$$\begin{aligned} \min \left\{ \|f\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T)}^{p^-}, \|f\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T)}^{p^+} \right\} &\leq \rho_{p_w(t,x)}(f) \leq \\ &\leq \max \left\{ \|f\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T)}^{p^-}, \|f\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T)}^{p^+} \right\}, \\ \min \left\{ \rho_{p_w(t,x)}^{\frac{1}{p^-}}(f), \rho_{p_w(t,x)}^{\frac{1}{p^+}}(f) \right\} &\leq \|f\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T)} \leq \\ &\leq \max \left\{ \rho_{p_w(t,x)}^{\frac{1}{p^-}}(f), \rho_{p_w(t,x)}^{\frac{1}{p^+}}(f) \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Зауважимо також, що

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^{p^-} - 1 \leq \int_{Q_T} |f(t,x)|^{p(t,x)} \, dxdt \leq \|f\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T)}^{p^+} + 1, \quad (1.8)$$

$$\forall f \in L^{p_w(\cdot)}(Q_T),$$

$$\|f_k - f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \rightarrow 0 \iff \int_{Q_T} |f_k(t,x) - f(t,x)|^{p(t,x)} \, dxdt \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

при  $k \rightarrow \infty$ ,

і при цьому мають місце такі оцінки: якщо  $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ , то

$$\|f\|_{L^{p^-}(Q_T)} \leq (1 + T|\Omega|)^{1/p^-} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}, \quad (1.10)$$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq (1 + T|\Omega|)^{1/(p^+)' } \|f\|_{L^{p^+}(Q_T)}, \quad (1.11)$$

(див., наприклад, [23, 31, 81]).

До того ж, в таких просторах виконується нерівність Юнга в наступній версії

$$|fg| \leq \varepsilon \frac{|f|^{p(\cdot)}}{p(\cdot)} + C(\varepsilon) \frac{|g|^{p'(\cdot)}}{p'(\cdot)},$$

де  $C(\varepsilon)$  є певною сталою, а  $\varepsilon > 0$  — довільний параметр.

Подальший результат можна розглядати як узагальнення відомої нерівності Гольдера для лебегових просторів зі змінною експонентою (доведення див. в [23, 31]).

**Твердження 1.1.1.** *Якщо  $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  і  $g \in L^{p'(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)$ , то  $(f, g) \in L^1(Q_T)$  і при цьому*

$$\int_{Q_T} (f, g) \, dxdt \leq 2 \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)}. \quad (1.12)$$

Як наслідок з (1.12), можна показати, що для множини  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  та функції  $p(\cdot)$ , яка задовольняє умову (1.4), має місце таке неперервне вкладення

$$L^{p(\cdot)}(Q_T) \hookrightarrow L^{r(\cdot)}(Q_T) \quad \text{за умови} \quad p(t, x) \geq r(t, x) \quad \text{для м.в. } (t, x) \in Q_T. \quad (1.13)$$

Нехай  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C^{0, \hat{\delta}}(\overline{Q_T})$  при деякому малому  $\hat{\delta} \in (0, 1]$  є довільною послідовністю експонент. Припустимо, що

$$\begin{aligned} p, p_k &\in C^{0, \hat{\delta}}(\overline{Q_T}) \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, \text{ та} \\ p_k(\cdot) &\rightarrow p(\cdot) \quad \text{рівномірно в } \overline{Q_T} \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пов'яжемо з цією послідовністю множину функцій  $\{f_k \in L^{p_k(\cdot)}(Q_T)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Характерною особливістю цієї множини є те, що кожен її елемент  $f_k$  належить відповідному простору Орлича  $L^{p_k(\cdot)}(Q_T)$ . Отже цю множину можна розглядати як послідовність в шкалі змінних просторів  $\{L^{p_k(\cdot)}(Q_T)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Будемо казати, що послідовність  $\{f_k \in L^{p_k(\cdot)}(Q_T)\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою, якщо

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt < +\infty. \quad (1.15)$$

**Означення 1.1.1.** *Обмежена послідовність  $\{f_k \in L^{p_k(\cdot)}(Q_T)\}_{k \in \mathbb{N}}$  називається слабо збіжною в змінному просторі Орлича  $L^{p_k(\cdot)}(Q_T)$  до функції*

$f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ , де  $p \in C^{0,\hat{\delta}}(\overline{Q_T})$  є границею  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C^{0,\hat{\delta}}(\overline{Q_T})$  в рівномірній топології простору  $C(\overline{Q_T})$ , якщо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} f_k \varphi \, dxdt = \int_{Q_T} f \varphi \, dxdt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2). \quad (1.16)$$

На завершення цього підрозділу наведемо один результат, який стосується властивості напівнеперервності  $L^{p_k(\cdot)}$ -норми відносно слабкої збіжності в змінному просторі  $L^{p_k(\cdot)}(Q_T)$  (див. для порівняння [1, Лемма 2.1]).

**Твердження 1.1.2.** *Якщо послідовність експонент  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  задовольняє умову (1.4),  $p_k \rightarrow p$  при  $k \rightarrow \infty$  м.с. в  $Q_T$ , а обмежена послідовність  $\{f_k \in L^{p_k(\cdot)}(Q_T)\}_{k \in \mathbb{N}}$  слабо збігається в  $L^p(Q_T)$  до  $f$ , то  $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ ,  $f_k \rightharpoonup f$  в змінному  $L^{p_k(\cdot)}(Q_T)$ , та*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt \geq \int_{Q_T} |f(t, x)|^{p(t, x)} \, dxdt. \quad (1.17)$$

*Доведення.* Приймаючи до уваги, що

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_T} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt - \int_{Q_T} \frac{p(t, x)}{p_k(t, x)} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt \right| \\ & \leq \|p_k - p\|_{C(\overline{Q_T})} \int_{Q_T} \frac{1}{p_k(t, x)} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt \\ & \leq \frac{\|p_k - p\|_{C(\overline{Q_T})}}{\alpha} \int_{Q_T} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dx \xrightarrow{\text{за (1.15)}} 0 \text{ при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

отримуємо

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \frac{p(t, x)}{p_k(t, x)} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt. \quad (1.18)$$

За нерівністю Юнга  $ab \leq |a|^p/p + |b|^{p'}/p'$ , маємо

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \frac{p(t, x)}{p_k(t, x)} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} \, dxdt \\ & \geq \int_{Q_T} p(t, x) f_k(t, x) \varphi(t, x) \, dxdt - \int_{Q_T} \frac{p(t, x)}{p'_k(t, x)} |\varphi(t, x)|^{p'_k(t, x)} \, dxdt, \end{aligned} \quad (1.19)$$

при  $p'_k(t, x) = p_k(t, x)/(p_k(t, x) - 1)$  та довільній  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ .

Тепер, переходячи до границі в (1.19) при  $k \rightarrow \infty$  з урахуванням властивості (1.14) та

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} f_k(t, x) \varphi(t, x) dx dt &= \\ &= \int_{Q_T} f(t, x) \varphi(t, x) dx dt \quad \text{при всіх } \varphi \in L^{p^-}(Q_T), \end{aligned} \quad (1.20)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |f_k(t, x)|^{p_k(t, x)} dx dt &\geq \\ &\geq \int_{Q_T} p(t, x) f(t, x) \varphi(t, x) dx dt - \int_{Q_T} \frac{p(t, x)}{p'(t, x)} |\varphi(t, x)|^{p'(t, x)} dx dt. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Оскільки це співвідношення справедливе для всіх  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ , а множина  $C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$  є щільною в  $L^{p'(\cdot)}(Q)$ , то його валідність матиме місце і для усіх  $\varphi \in L^{p'(\cdot)}(Q_T)$ . Отже поклавши  $\varphi = |f(t, x)|^{p(t, x)-2} f(t, x)$ , приходимо до анонсованого співвідношення (1.17). Як наслідок з (1.17) та оцінки (1.8), маємо:  $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ .

На завершення залишається зауважити, що насправді рівність (1.20) залишається вірною для усіх  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ , що і забезпечує слабку збіжність  $f_k \rightharpoonup f$  в змінному просторі  $L^{p_k(\cdot)}(Q_T)$ .  $\square$

### 1.1.3. Простір функцій з обмеженою варіацією

Нехай  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  є довільною функцією з простору  $L^1(\Omega)$ . Покладемо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Df| &= \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi dx : \right. \\ &\quad \left. \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad |\varphi(x)| \leq 1 \text{ для } x \in \Omega \right\}, \end{aligned}$$

де  $\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ . Згідно з теоремою Радона-Нікодіма, якщо  $\int_{\Omega} |Df| < +\infty$ , то розподіл  $Df$  є мірою і при цьому знайдеться векторно-значна функція  $\nabla f \in [L^1(\Omega)]^N$  та міра  $D_s f$ , що є сингулярною по відношенню до  $N$ -вимірної міри Лебега  $\mathcal{L}^N|_{\Omega}$  звуженої до  $\Omega$ , такі, що

$$Df = \nabla f \mathcal{L}^N|_{\Omega} + D_s f.$$

**Означення 1.1.2.**  $f \in L^1(\Omega)$  називається функцією з обмеженою варіацією на  $\Omega$ , якщо  $\int_{\Omega} |Df| < +\infty$ . Множину усіх функцій з  $L^1(\Omega)$ , для яких  $\int_{\Omega} |Df| < +\infty$ , називають простором функцій з обмеженою варіацією на  $\Omega$  і позначають  $BV(\Omega)$ .

Такий простір є банаховим відносно норми  $\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Df|$ . Нижче наведені результати для  $BV$ -функцій є добре відомими:

**Твердження 1.1.3.** Множини, які є рівномірно обмеженими за  $BV$ -нормою — відносно компактні в просторі  $L^1(\Omega)$ .

**Означення 1.1.3.** Послідовність  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset BV(\Omega)$  слабко-\* збігається до функції  $f \in BV(\Omega)$  (символьно  $f_k \xrightarrow{*} f$ ) тоді і тільки тоді, коли справджуються дві умови:  $f_k \rightarrow f$  сильно в  $L^1(\Omega)$  і  $Df_k \rightharpoonup Df$  слабко-\* в  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ , де через  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$  позначено простір усіх векторно-значних мір Бореля, який в свою чергу є дуальним до простору  $C(\Omega; \mathbb{R}^N)$  всіх неперервних функцій  $\varphi$  з компактним носієм.

**Твердження 1.1.4.** Нехай  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  є послідовністю в  $BV(\Omega)$ , яка сильно збігається до  $f$  в  $L^1(\Omega)$  і задовольняє умову  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} |Df_k| < +\infty$ . Тоді

(i)  $f \in BV(\Omega)$  і  $\int_{\Omega} |Df| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Df_k|$ ;

(ii)  $f_k \xrightarrow{*} f$  в  $BV(\Omega)$  (див. [7]).

**Твердження 1.1.5.** Нехай  $\Omega$  є відкритою обмеженою підмножиною  $\mathbb{R}^N$  з Ліпшиць регулярною межею. Тоді вкладення  $BV(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$  є неперервним і при цьому  $BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$  компактно для всіх  $p$  таких, що  $1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ . До того ж уснує стала  $C_{em} > 0$ , яка залежить лише від  $\Omega$  та  $p$  така, що для усіх  $u$  з  $BV(\Omega)$  справедливо (див. [12, р.378]),

$$\left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq C_{em} \|u\|_{BV(\Omega)}, \quad \forall p \in \left[ 1, \frac{N}{N-1} \right].$$

## 1.2. Слабка та сильна збіжності в $L^1(\Omega)$

Нехай всюди далі символом  $\varepsilon$  буде позначатися малий параметр, значення якого утворюють монотонно спадну послідовність додатніх чисел, яка збігається до нуля. При цьому позначення  $\varepsilon > 0$  означатиме, що мова іде лише про елементи такої послідовності, натомість  $\varepsilon \geq 0$  означатиме, що ця послідовність доповнена значенням  $\varepsilon = 0$ . Нехай  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є довільною послідовністю в  $L^1(\Omega)$ .

Кажуть, що послідовність  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^1(\Omega)$  слабо збігається до елемента  $u \in L^1(\Omega)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (в символах,  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  в  $L^1(\Omega)$ ), якщо

$$\int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi \, dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega).$$

Є добре відомим такий результат:

**Теорема 1.2.1.** *Нехай  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  в  $L^1(\Omega)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тоді*

- *послідовність  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є обмеженою в  $L^1(\Omega)$ ;*
- $\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}.$

Послідовність  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  називається екві-інтегровною, якщо для довільного  $\delta > 0$  знайдеться  $\tau = \tau(\delta)$  таке, що  $\int_S |u_\varepsilon| \, dx < \delta$  для всіх  $u_\varepsilon$  та довільної вимірної підмножини  $S \subset \Omega$  з лебеговою мірою  $|S| < \tau$ . Достатньою умовою, за виконання якої послідовність  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є екві-інтегровною, є існування сталої  $C > 0$  такої, що

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^{1+\theta} \, dx \leq C \tag{1.22}$$

при деякому  $\theta > 0$ .

**Теорема 1.2.2** (Dunford–Pettis). *Нехай  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  задана послідовність в  $L^1(\Omega)$ . Ця послідовність є компактною відносно слабкої збіжності в  $L^1(\Omega)$  тоді і тільки тоді, якщо  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є рівномірно обмеженою в  $L^1(\Omega)$ , тобто  $\sup_{\varepsilon>0} \|u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} < +\infty$ , а також  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є екві-інтегровною.*

**Теорема 1.2.3** (Lebesgue–Vitali). Якщо послідовність  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset L^1(\Omega)$  є екві-інтегрованою та існує функція  $u \in L^1(\Omega)$  така, що  $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$  майже скрізь в  $\Omega$ , то  $u_\varepsilon \rightarrow u$  в  $L^1(\Omega)$  сильно (за нормою).

Типовим наслідками теореми Vitali є такі результати.

**Лема 1.2.1.** Нехай  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є послідовністю в  $L^1(\Omega)$  такою, що  $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$  майже скрізь в  $\Omega$ , і ця послідовність є рівномірно обмеженою в  $L^p(\Omega)$  при деякому  $p > 1$ . Тоді

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{в } L^r(\Omega) \text{ для всіх } 1 \leq r < p. \quad (1.23)$$

**Лема 1.2.2.** Нехай  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,  $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ,  $u$ , and  $v$  є вимірними функціями і такими, що

$$u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x) \quad \text{м.с. в } \Omega, \quad \sup_{\varepsilon>0} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty, \quad (1.24)$$

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (1.25)$$

Тоді

$$uv \in L^1(\Omega) \quad \text{і} \quad u_\varepsilon v_\varepsilon \rightharpoonup uv \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (1.26)$$

**Лема 1.2.3.** Якщо  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою функцією і  $u_\varepsilon \rightharpoonup u$  в  $L^1(\Omega)$ , то

$$\int_{\Omega} F(u) dx \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} F(u_\varepsilon) dx.$$

### 1.3. Про поточкову збіжність градієнтів розв'язків еліптичних та параболічних рівнянь

В цьому розділі наведемо низку результатів, які забезпечують умови граничного переходу в рівняннях типу

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} a(x, u_n, \nabla u_n) &= f_n + g_n \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} + A(u_n) &= f_n + g_n \quad \text{в } (0, T) \times \Omega, \end{aligned}$$

а також у відповідних їм крайових та початково-крайових задачах. Основними першоджерелами послужили публікації [15, 16].



### 1.3.1. Збіжність градієнтів в еліптичному випадку

Нехай  $\Omega$  є обмеженою відкритою підмножиною простору  $\mathbb{R}^N$  з необов'язково гладкою межею  $\partial\Omega$ . Нехай величини  $p$  та  $p'$  є такими, що

$$1 < p, p' < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Нехай на просторі  $W^{1,p}(\Omega)$  є заданим оператор  $A$  за правилом

$$A(u) = -\operatorname{div} a(x, u, \nabla u),$$

де  $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  є функцією Каратеодорі, що задовольняє класичним умовам Leray-Lions (див. [63])

$$|a(x, s, \zeta)| \leq c(x) + k_1|s|^{p-1} + k_2|\zeta|^{p-1}, \quad (1.27)$$

$$(a(x, s, \zeta) - a(x, s, \zeta^*), \zeta - \zeta^*) > 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{(a(x, s, \zeta), \zeta)}{|\zeta| + |\zeta|^{p-1}} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |\zeta| \rightarrow +\infty, \quad (1.29)$$

$$\text{при м.в. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \zeta, \zeta^* \in \mathbb{R}^N, \quad \zeta \neq \zeta^*,$$

де  $c(x)$  належить простору  $L^{p'}(\Omega)$  і при цьому величини  $c \geq 0$ ,  $k_1$  та  $k_2$  є невід'ємними.

Тоді має місце такий результат:

**Теорема 1.3.1.** *Нехай послідовності  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  та  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  є такими, що*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{сильно в } W^{-1,p'}(\Omega), \quad (1.30)$$

$$g_n \text{ є обмеженими в } W^{-1,p'}(\Omega) \text{ та у просторі мір Радона } \mathcal{M}(\Omega), \quad (1.31)$$

а саме

$$|\langle g_n, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ з } \operatorname{supp} \varphi \subset K, \quad (1.32)$$

де стала  $C_K$  залежить лише від вибору компактної множини  $K$ .

Нехай також розв'язки  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  рівняння

$$-\operatorname{div} a(x, s, \nabla u_n) = f_n + g_n \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (1.33)$$

(в сенсі розподілень) задовольняють умову

$$u_n \rightarrow u \quad \text{сильно в } L_{loc}^p(\Omega), \text{ слабо в } W^{1,p}(\Omega) \text{ і м.с. в } \Omega. \quad (1.34)$$

Тоді

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ сильно в } L^q(\Omega; \mathbb{R}^N) \text{ для всіх } q < p. \quad (1.35)$$

**Зауваження 1.3.1.** Як випливає з наведеної теореми, виконання умов (1.27)–(1.34) гарантує існування підпослідовності розв'язків  $\{u_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}}$  такої, що

$$\nabla u_{n'}(x) \rightarrow \nabla u(x) \text{ майже скрізь в } \Omega.$$

Зауважимо також, що властивість (1.32) вочевидь виконується, якщо послідовність розподілень  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в просторі  $L_{loc}^1(\Omega)$ .

**Зауваження 1.3.2.** По суті рівняння (1.33) є "локальною" задачею в тому сенсі, що немає жодних крайових умов на функцію  $u_n$ . Разом з тим, якщо доповнити (1.33) однорідними умовами Діріхле на межі області і додатково припустити виконання умов коерцитивності, тобто

$$\frac{1}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \int_{\Omega} a(a, u, \nabla u) dx \rightarrow +\infty \text{ при } \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow \infty,$$

то можна показати, що послідовність  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  буде обмеженою в просторі  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , а отже з точністю до підпослідовності буде виконуватися припущення (1.34).

### 1.3.2. Параболічний випадок

В цьому підрозділі наведемо узагальнення теореми 1.3.1 на параболічний випадок. Нехай, як і вище,  $\Omega$  є обмеженою відкритою підмножиною простору  $\mathbb{R}^N$  з необов'язково гладкою межею  $\partial\Omega$ , і  $T > 0$  нехай є заданим числом. Покладемо  $Q_t = (0, T) \times \Omega$  і розглянемо нелінійне параболічне рівняння

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div} a(t, x, u_n, \nabla u_n) = f_n + g_n \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (1.36)$$

де  $A(u) = -\operatorname{div} a(t, x, u, \nabla u)$  є оператором Leray-Lions'а, який означено на  $L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega))$  з функцією Каратеодорі  $a : (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  що задовольняє умови

$$|a(t, x, s, \zeta)| \leq c(t, x) + k_1|s|^{p-1} + k_2|\zeta|^{p-1}, \quad (1.37)$$

$$(a(t, x, s, \zeta) - a(t, x, s, \zeta^*), \zeta - \zeta^*) > 0, \quad (1.38)$$

$$(a(t, x, s, \zeta), \zeta) \geq \alpha|\zeta|^p \quad \text{для деякого } \alpha > 0, \quad (1.39)$$

при м.в.  $(t, x) \in Q_T$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \zeta, \zeta^* \in \mathbb{R}^N$ ,  $\zeta \neq \zeta^*$ ,

де  $c(t, x)$  належить  $L^{p'}(Q_T)$ ,  $c \geq 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ .

Для довільного  $k > 0$  позначимо через  $T_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  оператор зрізки, який визначається за правилом:

$$T_k(s) = s, \quad \text{якщо } |s| \leq k, \quad T_k(s) = ks/|s|, \quad \text{якщо } |s| \geq k.$$

Мають місце такі результати.

**Теорема 1.3.2.** *Нехай послідовності  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  та  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  є такими, що*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{сильно в } L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (1.40)$$

$$g_n \text{ є обмеженими в } L^1(Q_T), g \in L^1(Q_T), \text{ і } g_n \rightharpoonup g \text{ в } L^1(Q_T), \quad (1.41)$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{сильно в } L^p(0, T; W^{1,p}(\Omega)), \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div} a(t, x, u_n, \nabla u_n) = f_n + g_n \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.43)$$

Нехай також виконуються припущення (1.37)–(1.39). Тоді, для довільного  $k > 0$ , має місце така збіжність

$$\nabla T_k(u_n) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{сильно в } L_{loc}^p(Q_T; \mathbb{R}^N). \quad (1.44)$$

**Теорема 1.3.3.** *Нехай послідовності  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  та  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  задовольняють умови (1.37), (1.38), (1.40), (1.42), (1.42). Окрім цього припускається, що*

$$(a(t, x, s, \zeta) - a(t, x, s, \zeta^*), \zeta - \zeta^*) \geq \begin{cases} \alpha|\zeta - \zeta^*|^p, & \text{для } p > 2, \\ \alpha \frac{|\zeta - \zeta^*|^2}{(d(t, x) + |\zeta| + |\zeta^*|)^{2-p}}, & \text{для } 1 \leq p \leq 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{м.с. в } (t, x) \in Q_T, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \zeta, \zeta^* \in \mathbb{R}^N, \\ g_n \in L^{p'}(0, T; W^{-1, p'}(\Omega)), \quad g_n \in \mathcal{M}(Q_T). \end{aligned}$$

Тоді

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \text{ сильно в } L^q(Q_T; \mathbb{R}^N) \text{ для всіх } q < p, \quad (1.45)$$

а отже, з точністю до підпоследовності, має місце поточкова збіжність

$$\nabla u_{n'}(x) \rightarrow \nabla u(x) \text{ майже скрізь в } Q_T.$$

#### 1.4. Про слабку збіжність потоків

Нехай є заданою певна сукупність параболічних рівнянь монотонного типу

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \operatorname{div} A_k(t, x, \nabla u_k) = f, \quad (t, x) \in Q_T, \quad (1.46)$$

в якій  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  і  $k = 1, 2, \dots$

Нехай  $u_k$  є розв'язком рівняння (1.46) при заданому  $k \in \mathbb{N}$  і цей розв'язок розуміється в сенсі розподілень. Припустимо, що  $A_k(\cdot, \cdot, \xi) \rightarrow A(\cdot, \cdot, \xi)$  при  $k \rightarrow \infty$  майже скрізь відносно перших двох аргументів і для всіх  $\xi \in \mathbb{R}^N$ .

Типову ситуацію, яка часто виникає при дослідження оптимізаційних задач і яка також є надважливою в багатьох інших областях нелінійного аналізу, можна змалювати таким чином: припустимо, що розв'язки  $u_k \in L^2(0, T; W^{1, p^-}(\Omega))$  рівняння (1.46) та відповідні їм потоки

$$w_k = A_k(\cdot, \cdot, \nabla u_k) \in L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$$

збігаються слабо, а саме,

$$u_k \rightharpoonup u \text{ в } L^2(0, T; W^{1, p^-}(\Omega)), \quad w_k \rightharpoonup w \text{ в } L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$$

при деяких  $1 < p^- < p^+$ ,  $(p^+)' = \frac{p^+}{p^+ - 1}$ .

У стаціонарному (еліптичному) випадку відповідно маємо

$$u_k \rightharpoonup u \text{ в } W^{1, p^-}(\Omega), \quad w_k \rightharpoonup w \text{ в } L^{(p^+)'(\Omega; \mathbb{R}^N)}.$$

Основним питанням є вияснити чи збігаються при цьому потоки, тобто чи зберігається рівність для граничних елементів  $A(t, x, \nabla u) = w$ . В загальному випадку, ця проблема не є тривіальною, оскільки функція  $A(\cdot, \cdot, v)$  є нелінійною відносно  $v$  і слабка збіжність  $v_k \rightharpoonup v$  не є достатною умовою для виконання такого граничного переходу  $A_k(\cdot, \cdot, v_k) \rightharpoonup A(\cdot, \cdot, v)$ . Отже виникає закономірне питання: які умови мають виконуватися, щоби гарантувати валідність рівності  $w = A(\cdot, \cdot, \nabla u)$ . Відповіді на ці та інші питання наведені нижче (більше деталей та доведення див. в [82, 84]).

Для початку нагадаємо відомий результат Tartar–Murat’а, який ще називають принципом компенсованої компактності [67, 79].

**Лема 1.4.1.** *Нехай послідовності  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  та  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є такими, що*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\beta}(\Omega), \quad w_k \rightharpoonup w \text{ в } L^{\beta'}(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta-1}, \quad \beta > 1, \quad (1.47)$$

$$\operatorname{div} w_k = 0 \quad \text{в сенсі розподілень}. \quad (1.48)$$

Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (w_k, \nabla u_k) \varphi \, dx = \int_{\Omega} (w, \nabla u) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.49)$$

Як відомо, добуток двох слабо збіжних послідовностей вектор-функцій  $\nabla u_k$  та  $w_k$  має \*-слабку границю в  $L^1(\Omega)$ , якщо тільки один із співмножників збігається сильно. Проте наведена лема показує, що відсутність сильної збіжності може бути компенсована взаємно доповнюючими властивостями соленоїдальності та потенціальності таких співмножників. Дійсно, виконання умови (1.48) гарантує такі інтегральні тотожності

$$\int_{\Omega} (w_k, \nabla \psi) \, dx = 0, \quad \int_{\Omega} (w, \nabla \psi) \, dx = 0, \quad \forall \psi \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \quad (1.50)$$

що означає: властивість соленоїдальності вектор-функцій  $w_k$  зберігається при переході до границі.

З іншої сторони, слабка збіжність послідовності  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  та компактне вкладення  $W^{1,\beta}(\Omega) \subset L^\beta(\Omega)$ , гарантує сильну збіжність  $u_k \nabla \varphi \rightharpoonup u \nabla \varphi$  в  $L^\beta(\Omega; \mathbb{R}^N)$ . Отже, з урахуванням (1.50), маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_k, \nabla u_k) \varphi \, dx &= - \int_{\Omega} (w_k, \nabla \varphi) u_k \, dx \rightarrow \\ &\rightarrow - \int_{\Omega} (w, \nabla \varphi) u \, dx = \int_{\Omega} (w, \nabla u) \varphi \, dx, \end{aligned}$$

що і підтверджує співвідношення (1.49).

Проте ситуація значно ускладнюється, якщо потрібно перейти до границі в добутку  $(w_k, \nabla u_k)$ , що є обмеженим в  $L^1(\Omega)$ , за умови, якщо:

$u_k \in W^{1,\beta}(\Omega)$ ,  $w_k \in L^{\beta'}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ,  $w_k$  є соленоїдальним вектором,  $w_k \rightharpoonup w$  в  $L^{\beta'}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ , проте замість (1.47)<sub>1</sub> маємо:  $\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u$  в  $L^\alpha(\Omega; \mathbb{R}^N)$  при деякому  $1 < \alpha < \beta$ .

В цьому випадку немає ніяких підстав вважати, що послідовність скалярних добутків  $\{(w_k, \nabla u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  є \*-слабо компактною в  $L^1(\Omega)$ . Натомість можна лише стверджувати, що переходячи за необхідності до підпослідовності, отримаємо слабку збіжність в просторі мір

$$(w_k, \nabla u_k) \, dx \rightharpoonup d\mu \quad (1.51)$$

де  $\mu$  є скінченною мірою Бореля на  $\Omega$ .

Відповідь на це запитання дає узагальнена лема про компенсовану компактність, яка доведена в роботах [81, 82].

**Лема 1.4.2.** *Припустимо, що послідовності  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  та  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  задовольняють умови:*

- (i)  $\operatorname{div} w_k = 0$  в сенсі розподілень;
- (ii)  $u_k \rightharpoonup u$  в  $W^{1,\alpha}(\Omega)$ ;
- (iii)  $w_k \rightharpoonup w$  в  $L^{\beta'}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ;
- (iv)  $\{(w_k, \nabla u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  обмежена в  $L^1(\Omega)$ ;
- (v)  $u_k \in W^{1,\beta}(\Omega)$

і при цьому

$$1 < \alpha < \beta < \alpha^*, \quad \text{де } \alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha N}{N - \alpha}, & \text{при } \alpha < N, \\ +\infty, & \text{при } \alpha \geq N \end{cases} \quad (1.52)$$

Тоді гранична міра в (1.52) має таку структуру

$$d\mu = (w, \nabla u) + \mu^*,$$

де  $\mu^*$  є сингулярною мірою на  $\Omega$  відносно міри Лебега.

Щодо еволюційного (параболічного) випадку, то тут мають місце такі результати:

**Теорема 1.4.1.** Нехай послідовності  $\{u_k(t, x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  та  $\{w_k(t, x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  є такими, що

$$(i) \quad \frac{dw_k}{dt} - \operatorname{div} w_k = 0 \text{ в сенсі розподілень на } Q_T = (0, T) \times \Omega;$$

$$(ii) \quad w_k \rightharpoonup w \text{ в } L^{\beta'}(Q_T; \mathbb{R}^N);$$

$$(iii) \quad \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ і } u_k \rightharpoonup u \text{ в } L^\alpha(0, T; W^{1, \alpha}(\Omega));$$

$$(iv) \quad u_k \in L^\beta(0, T; W^{1, \beta}(\Omega));$$

$$(v) \quad \{(w_k, \nabla u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ обмежена в } L^1(Q_T), (w_k, \nabla u_k) \geq 0, \text{ і}$$

$$(w_k, \nabla u_k) dxdt \rightharpoonup d\mu, \quad d\mu = a(t, x) dt dx + d\mu^s \quad (1.53)$$

в сенсі слабкої збіжності мір, де  $\mu$  є скінченною мірою Бореля на  $Q_T$ , а  $\mu^s$  є сингулярною мірою відносно міри Лебега  $dt dx$

і при цьому

$$\frac{2N}{N+2} < \alpha \leq \beta < \alpha_0 = \begin{cases} \alpha \frac{N+2}{N}, & \text{при } \alpha < N, \\ \alpha + 2, & \text{при } \alpha \geq N. \end{cases}$$

Тоді компонента  $a(t, x)$  в (1.53) задовольняє нерівність

$$a \leq (w, \nabla u) \quad \text{м.с. в } Q_T.$$

У випадку коли  $u_k$  є розв'язками відповідних рівнянь (1.46), а  $w_k = A_k(\cdot, \cdot, \nabla u_k) \in L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  є відповідними їм потоками, результат теореми 1.4.1 можна уточнити в такий спосіб:

**Теорема 1.4.2.** *Нехай є виконаними такі умови:*

- (C1)  $A_k(t, x, \xi)$  і  $A(t, x, \xi)$  є  $\mathbb{R}^N$ -значними функціями Каратеодорі, тобто ці функції є неперервними відносно  $\xi \in \mathbb{R}^N$  для майже всіх  $(t, x) \in Q_T$  та вимірними відносно  $(t, x) \in Q_T$  при кожному  $\xi \in \mathbb{R}^N$ ;
- (C2)  $\left( A_k(t, x, \xi) - A_k(t, x, \zeta), \xi - \zeta \right) \geq 0$ ,  $A_k(t, x, 0) = 0 \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^N$  і для майже всіх  $(t, x) \in Q_T$ ;
- (C3)  $|A_k(t, x, \xi)| \leq c(|\xi|) < \infty$  та  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k(t, x, \xi) = A(t, x, \xi)$  для всіх  $\xi \in \mathbb{R}^N$  та майже всіх  $(t, x) \in Q_T$ ;
- (C4)  $u_k \rightharpoonup u$  в  $L^{p^-}(0, T; W^{1, p^-}(\Omega))$ ,  $p^- > 1$  і  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою послідовністю в  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ ;
- (C5)  $w_k = A_k(t, x, \nabla u_k) \rightharpoonup w$  в  $L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$ ,  $p^+ > 1$ ;
- (C6)  $u_k \in L^{p^+}(0, T; W^{1, p^+}(\Omega))$  при всіх  $k \in \mathbb{N}$  і при цьому  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|(w_k, \nabla u_k)\|_{L^1(Q_T)} < \infty$ ;
- (C7)  $1 < p^- < p^+ < 2p^-$ .

Тоді потік  $A_k(t, x, \nabla u_k)$  слабо збігається в просторі  $L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  до потоку  $A(t, x, \nabla u)$ .

**Лема 1.4.3** ([81]). *Нехай  $\Psi$  є класом функцій  $F(t, x, \xi)$ , кожна з яких є опуклою відносно  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , вимірною за  $(t, x) \in Q_T$  та задовольняє оцінку*

$$c_1|\xi|^{p^-} \leq F(t, x, \xi) \leq c_2|\xi|^{p^+}, \quad 1 < p^- \leq p^+ < \infty, \quad c_1, c_2 > 0.$$

*Нехай функції  $F_k$  та  $F$  належать класу  $\Psi$  та виконуються такі умови:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(t, x, \xi) = F(t, x, \xi) \quad \text{для м.в. } (t, x) \in Q_T \text{ та довільних } \xi \in \mathbb{R}^N.$$



Тоді справджується така властивість напівнеперервності знизу: якщо  $v_k \rightharpoonup v$  в  $L^1(Q_T; \mathbb{R}^N)$ , то

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} F_k(t, x, v_k) dx dt \geq \int_{Q_T} F(t, x, v) dx dt. \quad (1.54)$$

**Лема 1.4.4** ([82]). Нехай  $A_k(t, x, \xi)$  та  $A(t, x, \xi)$  є  $\mathbb{R}^N$ -значними функціями Каратеодорі з властивостями (C1)–(C3). Припустимо, що

$$v_k \rightharpoonup v \quad \text{і} \quad w_k = A_k(t, x, v_k) \rightharpoonup w \quad \text{в} \quad L^1(Q_T; \mathbb{R}^N) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

та  $(w, v) \in L^1(Q_T)$ . Тоді

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} (A_k(t, x, v_k), v_k) dx dt \geq \int_{Q_T} (w, v) dx dt. \quad (1.55)$$

**Лема 1.4.5** ([4]). Нехай  $\varepsilon$  є малим параметром, значення якого міняються в межах строго монотонно спадної послідовності додатних чисел, які прямують до 0. Нехай виконуються умови:

- (i)  $p_\varepsilon, p \in C(\overline{Q_T})$ ,  $p_\varepsilon \rightarrow p$  в  $C(\overline{Q_T})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,
- (ii)  $v_\varepsilon \in L^1(Q_T; \mathbb{R}^N)$ ,  $\int_{Q_T} \left[ |v_\varepsilon|^{p_\varepsilon} + \varepsilon |v_\varepsilon|^{p^+} \right] dx dt \leq K < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$ ,
- (iii)  $|v_\varepsilon|^{p_\varepsilon-2} v_\varepsilon + \varepsilon |v_\varepsilon|^{p^+-2} v_\varepsilon \rightharpoonup z$  в  $L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Тут  $(p^+)' = \frac{p^+}{p^+-1}$ , та  $p^-$  і  $p^+$  є такими, що  $1 < p^- \leq p_\varepsilon(t, x) \leq p^+ < \infty$  для всіх  $\varepsilon > 0$  та  $(t, x) \in Q_T$ . Тоді  $z \in L^{p'(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)$ .

## РОЗДІЛ 2

### Задача оптимального керування для рівняння Перона-Маліка та її регуляризація

Даний розділ присвячено дослідженню одного класу задач оптимального керування для нелінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку з виродженням в головній частині диференціального оператора. Основні результати цього розділу опубліковано у статті [2] та анонсовано в матеріалах конференції [6].

#### 2.1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даного розділу виступає така задача оптимального керування:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \\ & + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right| \end{aligned} \quad (2.1)$$

за наявності обмежень

$$-\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) + \alpha u = v \quad \text{в } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.3)$$

$$0 \leq u(x) \leq M \quad \text{м.с. в } \Omega, \quad (2.4)$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega). \quad (2.5)$$

Тут  $\Omega$  є обмеженою відкритою підмножиною  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) з достатньо гладкою межею  $\partial\Omega$ , символом  $\partial_\nu$  позначено похідну за зовнішньою нормаллю,  $u_d \in L^\infty(\Omega)$  є заданою функцією,  $\alpha, \lambda, \gamma, M > 0$  — сталі величини, а функція  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  виступає в якості керування. Для зручності покладемо

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2}. \quad (2.6)$$

Як безпосередньо впливає з формули (2.6), якщо функція  $g(|\nabla u|)$  розглядається як коефіцієнт оператора Лапласа, то ми маємо випадок еліптичного рівняння з виродженими коефіцієнтами. Незважаючи на те, що є багато відомих результатів, зокрема в обробці зображень і з використанням рівнянь із подібним до (2.2) типом нелінійності (див. наприклад роботу [71]), в [39, 40] було показано, що крайова задача для рівняння Перона-Маліка в загальному випадку не є коректною за Адамаром через вироджену поведінку множника  $g(|\nabla u|)$ ,  $g(|\nabla u|) \rightarrow 0$ , оскільки градієнт  $|\nabla u|$  може набувати нескінченних значень. В зв'язку з цим питання про існування та єдиність розв'язків крайової задачі та відповідної задачі оптимального керування на сьогодні залишаються відкритими.

Щоб підкреслити означені особливості припустимо, що  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  у (2.2). Тоді дивергентний член в рівнянні (2.2) можна подати у такому вигляді

$$\operatorname{div} (g(|\nabla u|) \nabla u) = g'(|\nabla u|) |\nabla u|^{-1} \nabla^2 u (\nabla u, \nabla u) + g(|\nabla u|) \Delta u.$$

Поклавши

$$u_{\xi\xi} = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{|\nabla u|^2} = \nabla^2 u \left( \frac{\nabla u^\perp}{|\nabla u^\perp|}, \frac{\nabla u^\perp}{|\nabla u^\perp|} \right),$$

бачимо, що цей вираз являє собою лінійну дифузію в напрямку, що є ортогональним до  $\nabla u$ , в той час як

$$u_{\eta\eta} = \frac{u_{xx}u_x^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2}{|\nabla u|^2} = \nabla^2 u \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

є дифузійною в напрямку  $\nabla u$ . Таким чином, анізотропний дифузійний член в (2.2) можна записати у вигляді

$$\operatorname{div} (g(|\nabla u|) \nabla u) = g(|\nabla u|) u_{\xi\xi} + G'(|\nabla u|) u_{\eta\eta}, \quad \text{де } G(s) = sg(s), \quad (2.7)$$

тобто він являє собою суму тангенціальної дифузії з ваговою функцією  $g(\cdot)$  та нормальної (трансверсальної) дифузії з ваговим коефіцієнтом  $G'(\cdot)$ , відповідно.

Оскільки  $g$  є додатною функцією, то перший доданок в (2.7) характеризує дифузію 'уздовж контура (ребра)  $u$ ', в той час як коефіцієнт дифузії

в перпендикулярному напрямі може бути як додатнім (якщо  $G'(|\nabla u|) > 0$ ), так і нульовим (якщо  $G'(|\nabla u|) = 0$ ), а також від’ємним (якщо  $G'(|\nabla u|) < 0$ ). Зауважимо, що для оригінальної функції дифузії  $g$  в (2.6) маємо  $G'(s) = g(s) + sg'(s) = (1 - s^2)/(1 + s^2)^2$ . Отже,  $G'(|\nabla u|) > 0$ , якщо  $s^2 < 1$ , що передбачає пряму дифузію в областях, де квадрат величини градієнта функції  $u$  менший аніж 1, тоді як  $G'(|\nabla u|) < 0$ , якщо  $s^2 > 1$ , що призводить до зворотної дифузії в області, де абсолютні значення градієнта перевищують 1. Таким чином, з математичної точки зору, модель (2.2) є погано обумовленою задачею математичної фізики і цей факт може спричинити появу специфічних властивостей у відповідній задачі оптимального керування (2.1)–(2.5).

Зважаючи на це, даний розділ має подвійну мету. Перша полягає в тому, щоб довести результат існування для задачі оптимального керування (2.1)–(2.5) з розподіленим керуванням у правій частині для нелінійних рівнянь стану, що містять немонотонний та некоерцитивний диференціальний оператор. Друга – провести асимптотичний аналіз для спеціального класу коректно поставлених параметризованих задач оптимального керування з фіктивним керуванням у коефіцієнтах вагового оператора Лапласа та показати, що вихідну задачу можна розглядати як варіаційну “границю” для обраної апроксимаційної послідовності. Як наслідок, це дозволить довести результат щодо існування для вихідної задачі оптимального керування та вказати шлях для апроксимації її розв’язків.

На сьогодні в літературі запропоновано багато різноманітних варіантів регуляризації для задач оптимального керування, які пов’язані з виродженими еліптичними рівняннями (див., наприклад, [53, 54, 73]). Разом з тим задача (2.1)–(2.5) є новою, а отже, в силу специфіки рівняння (2.2), проблема її регуляризації вимагає окремого дослідження. Найвідоміший підхід до регуляризації рівняння Перона–Маліка виглядає наступним чином (див. [6, 21, 38])

$$\begin{cases} -\operatorname{div} (g(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u) + \alpha u = v & \text{в } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.8)$$

де пропонується замінити величину градієнта  $|\nabla u|$ , що використовується у функції дифузії  $g$ , на його просторово регуляризований варіант  $|\nabla G_\sigma * u|$ . Тут  $G_\sigma$  є двовимірним Гауссіаном,

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

а знак  $*$  означає операцію згортки

$$(\nabla G_\sigma * u)(x) := \int_{\Omega} \nabla G_\sigma(x - y) u(y) dy, \quad \forall x \in \Omega.$$

Однак, як зазначається в [77], просторово-інваріантне гаусівське згладжування всередині дивергентного члена має тенденцію зміщувати зону виродження від її вихідних місць (див. [77], де це питання детально вивчається). Цей ефект, відомий як крайова дислокація, може бути згубним, особливо в контексті проблеми виявлення зони дегенерації та її застосування для дистанційного зондування та моніторингу земної поверхні.

В зв'язку з цим в даному розділі пропонується інший підхід до апроксимації задачі оптимального керування (2.1)–(2.5), який кардинально відрізняється від запропонованого вище. А саме, пропонується замінити нелінійність у головній частині еліптичного оператора на фіктивне керування з відповідного функціонального простору та деякими додатковими спеціальними поточковими обмеженнями на поточний стан системи. Ми показуємо, що в цьому випадку на кожному рівні апроксимації будемо мати справу з коректно поставленими задачами оптимального керування і, що є найбільш важливим, будь-яка послідовність їх розв'язків, коли параметр регуляризації прямує до нуля, є компактною у відповідній топології, а її кластерні точки є розв'язками вихідної задачі оптимального керування. Доведення цих результатів ґрунтується на залученні специфічних властивостей градієнтів розв'язків рівняння Перона-Маліка. На завершення розділу наво-

дяться умови оптимальності апроксимаційних задач та дається їх строге обґрунтування.

## 2.2. Постановка задачі оптимального керування та схема її регуляризації

Як було зазначено вище, оператор  $\operatorname{div} (g(|\nabla u|) \nabla u)$  із функцією  $g$ , яка задана правилом (2.6), є прикладом нелінійного оператора в дивергентній формі з так званою виродженою нелінійністю. Крім того, оскільки функція  $\mathbb{R}^N \ni s \mapsto \frac{s}{1+|s|^2} \in \mathbb{R}^N$  не є ані монотонною ні коерцитивною, то питання щодо існування розв'язку задачі (2.2)–(2.3) та його єдиності є відкритим в літературі. З математичної точки зору модель (2.2)–(2.3) є прикладом некоректної за Адамаром задачі математичної фізики, і цей факт може спричинити появу багато несподіваних властивостей [32]. Незважаючи на цю обставину, наш головний інтерес полягає в розгляді наступної задачі оптимального керування

$$\begin{aligned} \text{Мінімізувати } J(v, u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ & + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right| \end{aligned} \quad (2.9)$$

за наявності обмежень (2.2)–(2.5).

Будемо казати, що пара  $(v, u)$  є допустимою для задачі (2.9), (2.2)–(2.5), якщо

$$\begin{aligned} v & \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega), \\ 0 & \leq u(x) \leq M \quad \text{м.с. в } \Omega, \quad J(v, u) < +\infty, \end{aligned} \quad (2.10)$$

і при цьому вона є пов'язаною інтегральною тотожністю

$$\int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} (\nabla u, \nabla \varphi) dx + \alpha \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (2.11)$$

Нехай  $\Xi$  — множина всіх можливих розв'язків задачі (2.9), (2.2)–(2.5). Через вироджену поведінку множника  $g(|\nabla u|)$  структура множини  $\Xi$  та її основні топологічні властивості загалом невідомі. Зважаючи на це, введемо таке сімейство апроксимуючих задач керування

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}_\varepsilon) \quad \text{Мінімізувати} \quad J_\varepsilon(\rho, v, u) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \\
& + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Omega} |D\rho| + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left| \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right|^2 dx \quad (2.12)
\end{aligned}$$

за обмежень

$$-\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \alpha u = v \quad \text{в } \Omega, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.14)$$

$$0 \leq u(x) \leq M \quad \text{м.с. в } \Omega, \quad (2.15)$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega), \quad (2.16)$$

$$\rho \in \mathfrak{R}_{ad} := \{h \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : 0 \leq h(x) \leq 1 \text{ м.с. в } \Omega\}. \quad (2.17)$$

Будемо казати, що набір  $(\rho, v, u)$  є допустимим розв'язком задачі (2.12)–(2.17), якщо

$$\rho \in \mathfrak{R}_{ad}, \quad v \in \mathfrak{V}_{ad}, \quad u \in H^1(\Omega), \quad (2.18)$$

$$0 \leq u(x) \leq M \quad \text{та} \quad \rho(x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u(x)|^2} \right\} \quad \text{м.с. в } \Omega, \quad (2.19)$$

і при цьому, для кожної функції  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , цей набір задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega} \rho (\nabla u, \nabla \varphi) dx + \alpha \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} v \varphi dx. \quad (2.20)$$

Множину всіх допустимих розв'язків позначимо через  $\Xi_\varepsilon$ . Виходячи з класичних результатів математичної фізики стає зрозумілим, що  $\Xi_\varepsilon \neq \emptyset$  при кожному  $\varepsilon > 0$ .

Таким чином, ми залучаємо до розгляду однопараметричне сімейство задач оптимізації (2.12)–(2.17) з додатковим  $BV$ -керуванням у коефіцієнтах еліптичного оператора. Насправді ця тема має власну довгу історію, починаючи з робіт Murat'a [66] і Tartar'a [78]. Задача оптимального керування в коефіцієнтах диференціальних операторів старшого порядку та з фазовими обмеженнями була вперше детально розглянута в роботі [19] для випадку класичного рівняння Лапласа, де скалярний коефіцієнт  $\rho$  в

$\operatorname{div}(\rho \nabla \cdot)$  було прийнято за керування. Подальше узагальнення таких задач для різних класів допустимих керувань в коефіцієнтах знайшло своє відображення в роботах [18, 20, 24, 25, 35, 36, 44, 55].

Розпочнемо з одного допоміжного результату, який можна розглядати як певну специфікацію добре відомого результату Vossardo та Murat'a (див. теорему 2.1 у [16])

**Лема 2.2.1.** *Нехай  $\varepsilon \in (0, 1)$  є довільною фіксованою величиною. Нехай послідовності*

$$\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H^1(\Omega), \quad \{v_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega), \quad \text{та} \quad \{\rho_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(\Omega)$$

*є такими, що  $(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon$  при всіх  $k \in \mathbb{N}$ , і при цьому*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ слабо в } H^1(\Omega), \text{ сильно в } L^2(\Omega), \text{ та м.с. в } \Omega, \quad (2.21)$$

$$v_k \rightharpoonup v \text{ слабо в } L^2(\Omega), \quad (2.22)$$

$$\rho_k \rightharpoonup \rho \text{ слабо-}^* \text{ в } BV(\Omega) \text{ та м.с. в } \Omega. \quad (2.23)$$

Тоді

$$\nabla u_k \rightarrow \nabla u \text{ сильно в } L^q(\Omega) \text{ при кожному } q \in [1, 2]. \quad (2.24)$$

*Доведення.* Беручи до уваги співвідношення

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\rho_k (\nabla u_k, \nabla u_k - \nabla u) - \rho (\nabla u, \nabla u_k - \nabla u)] \, dx \\ &= \int_{\Omega} \rho_k |\nabla u_k - \nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} (\rho_k - \rho) (\nabla u, \nabla u_k - \nabla u) \, dx \end{aligned}$$

та обираючи в (2.20) тестовою функцією вираз  $u_k - u$ , бачимо, що

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_k |\nabla u_k - \nabla u|^2 \, dx &= - \int_{\Omega} (\rho_k - \rho) (\nabla u, \nabla u_k - \nabla u) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho (\nabla u, \nabla u_k - \nabla u) \, dx - \alpha \int_{\Omega} u_k (u_k - u) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} v_k (u_k - u) \, dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Оскільки  $\rho \in L^\infty(\Omega)$  і  $u_k - u \rightarrow 0$  сильно в  $L^2(\Omega)$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho (\nabla u, \nabla u_k - \nabla u) \, dx \stackrel{\text{by (2.21)}}{=} 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_k (u_k - u) \, dx \stackrel{\text{by (2.22)}}{=} 0, \quad (2.26)$$



$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k (u_k - u) \, dx \stackrel{\text{by (2.21)}}{=} 0. \quad (2.27)$$

Більше того, беручи до уваги той факт, що  $\rho_k(x) - \rho(x) \rightarrow 0$  м.с. в  $\Omega$  а послідовність  $\{\nabla u_k - \nabla u\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ , робимо висновок:

$$(\rho_k - \rho) (\nabla u_k - \nabla u) \rightarrow 0 \quad \text{слабо в } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Отже

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\rho_k - \rho) (\nabla u, \nabla u_k - \nabla u) \, dx = 0. \quad (2.28)$$

Переходячи до границі в (2.25) при  $k \rightarrow \infty$ , отримуємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_k |\nabla u_k - \nabla u|^2 \, dx \stackrel{\text{by (2.26)–(2.28)}}{=} 0. \quad (2.29)$$

Тепер скористаємося умовою, що  $(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_{\varepsilon}$  при кожному  $k \in \mathbb{N}$ . Як результат, маємо

$$\rho_k(x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u_k(x)|^2} \right\} \geq \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \text{ м.с. в } \Omega$$

при всіх  $k \in \mathbb{N}$  та достатньо малому  $\varepsilon > 0$ . Тоді, в силу поточної збіжності  $\rho_k(x) \rightarrow \rho(x)$  м.с. в  $\Omega$ , отримуємо:  $\rho(x) > \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$  м.с. в  $\Omega$ . Отже

$$0 \leq \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k - \nabla u|^2 \, dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \rho_k |\nabla u_k - \nabla u|^2 \, dx = 0.$$

Таким чином  $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$  сильно в  $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$  при  $k \rightarrow \infty$ . □

З метою подальшого аналізу топологічних властивостей множини допустимих розв'язків  $\Xi_{\varepsilon}$  в задачі (2.12)–(2.17), введемо такі поняття:

**Означення 2.2.1.** *Послідовність  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}}$  будемо називати обмеженою, якщо*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} [\|\rho_k\|_{BV(\Omega)} + \|v_k\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k\|_{H^1(\Omega)}] < +\infty.$$

**Означення 2.2.2.** *Будемо казати, що обмежена послідовність допустимих розв'язків  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}}$   $\tau$ -збігається до  $(\rho, v, u) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , якщо виконуються умови (2.21)–(2.23).*

**Зауваження 2.2.1.** Як випливає з лєми 2.2.1, якщо  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  є  $\tau$ -збіжною послідовністю допустимих розв'язків і  $(\rho_k, v_k, u_k) \xrightarrow{\tau} (\rho, v, u)$ , то  $u_k \rightarrow u$  сильно в  $H^1(\Omega)$ . Отже, переходячи за необхідності до підпослідовності, можна стверджувати, що  $\nabla u_k(x) \rightarrow \nabla u(x)$  м.с. в  $\Omega$ .

Покажемо, що має місце такий результат.

**Твердження 2.2.1.** При кожному  $\varepsilon \in (0, 1)$  множина  $\Xi_\varepsilon$  є секвенційно замкненою відносно  $\tau$ -збіжності.

*Доведення.* Нехай  $\{(\rho_k, v_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi_\varepsilon$  є довільною  $\tau$ -збіжною послідовністю допустимих розв'язків для задачі оптимального керування (2.12)–(2.17). Нехай  $(\rho, v, u)$  є її  $\tau$ -границею. Покажемо, що  $(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon$ .

Оскільки включення  $v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega)$  та  $u \in H^1(\Omega)$  є очевидними, то покажемо, що решта умов з (2.18)–(2.19) є валідними для  $\tau$ -граничного набору  $(\rho, v, u)$ . Як зазначено в зауваженні 2.2.1, ми завжди можемо вважати, що

$$u_k(x) \rightarrow u(x) \quad \text{і} \quad \frac{1}{1 + |\nabla u_k(x)|^2} \rightarrow \frac{1}{1 + |\nabla u(x)|^2} \quad \text{м.с. в } \Omega.$$

Отже, за означенням  $\tau$ -збіжності, граничний перехід у співвідношеннях

$$0 \leq u_k(x) \leq M \quad \text{та} \quad \rho_k(x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u_k(x)|^2} \right\} \quad \text{м.с. в } \Omega$$

приводить до нерівностей (2.19). Що стосується включення  $\rho \in \mathfrak{R}_{ad}$ , то воне є прямим наслідком слабкої- $*$  компактності обмеженої множини  $\mathfrak{R}_{ad}$  в  $BV(\Omega)$ .

Залишається показати, що граничний набір функцій  $(\rho, v, u)$  задовольняє інтегральну тотожність (2.20). Для цього зафіксуємо тестову функцію  $\varphi \in H^1(\Omega)$  та перейдемо до границі у співвідношенні

$$\int_{\Omega} \rho_k (\nabla u_k, \nabla \varphi) \, dx + \alpha \int_{\Omega} u_k \varphi \, dx = \int_{\Omega} v_k \varphi \, dx \quad (2.30)$$

залучаючи лему 2.2.1. В результаті отримуємо рівність (2.20). Таким чином  $(\rho, v, u)$  є допустимим розв'язком для задачі оптимального керування (2.12)–(2.17).  $\square$

Тепер перейдемо до проблеми розв'язанності параметризованої задачі оптимального керування (2.12)–(2.17).

**Теорема 2.2.1.** *Нехай  $u_d \in L^\infty(\Omega)$  є довільною функцією і нехай  $\alpha, \lambda, \gamma, M > 0$  є заданими сталими. Тоді, при кожному значенні  $\varepsilon \in (0, 1)$ , задача оптимального керування (2.12)–(2.17) допускає принаймні один розв'язок  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon$ .*

*Доведення.* Для початку, зафіксувавши довільне  $\varepsilon \in (0, 1)$ , покажемо, що задача (2.12)–(2.17) є змістовною, тобто  $\Xi_\varepsilon \neq \emptyset$ . Для цього покладемо  $\rho = \varphi_1$  і  $u = \varphi_2$ , де  $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$  та  $\varphi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  є довільними функціями такими, що

$$\varphi_1 \in \mathfrak{R}_{ad}, \quad 0 \leq \varphi_2(x) \leq M \quad \text{і} \quad \varphi_1(x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla \varphi_2(x)|^2} \right\} \quad \text{в } \Omega.$$

Оскільки  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} = 0$  на  $\partial\Omega$ , то з наведеного вище випливає, що набір  $(\rho, v, u)$ , де

$$v := -\operatorname{div}(\varphi_1 \nabla \varphi_2) + \alpha \varphi_2,$$

є допустимим розв'язком. Отже  $\Xi_\varepsilon \neq \emptyset$ .

Нехай  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  являє собою мінімізаційну послідовність в задачі (2.12)–(2.17). Тоді з виконання рівності

$$\begin{aligned} \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \int_\Omega |u_k - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_\Omega |v_k|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega |D\rho_k| + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \left| \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right|^2 dx \right] < +\infty \end{aligned}$$

та означення множини  $\mathfrak{R}_{ad}$  випливає існування сталої  $C > 0$  такої, що

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad \text{і} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\rho_k\|_{BV(\Omega)} \leq C.$$

Отже послідовність кортежів  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в сенсі означення 2.2.1. Це означає, що знайдуться функції  $\rho_\varepsilon^0 \in BV(\Omega)$ ,  $v_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$  і  $u_\varepsilon^0 \in H^1(\Omega)$  такі, що з точністю до підпослідовності  $(\rho_k, v_k, u_k) \xrightarrow{\tau} (\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Оскільки множина  $\Xi_\varepsilon$  є секвенційно замкненою відносно  $\tau$ -збіжності (див. твердження 2.2.1), то набір  $\tau$ -граничних функцій

$(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$  є допустимим розв'язком для задачі оптимального керування (2.12)–(2.17) (тобто  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon$ ). На завершення доведення залишається зауважити, що має місце збіжність  $\nabla u_k(x) \rightarrow \nabla u_\varepsilon^0(x)$  м.с. в  $\Omega$  (див. зауваження 2.2.1), а отже

$$\rho_k(x) - \frac{1}{1 + |\nabla u_k(x)|^2} \rightarrow \rho_\varepsilon^0(x) - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0(x)|^2} \text{ м.с. в } \Omega.$$

Так як

$$\rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \in L^\infty(\Omega) \text{ і } \left\| \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2 \text{ для всіх } k \in \mathbb{N},$$

то послідовність  $\left\{ \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  є екві-інтегрованою. Отже

$$\rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \rightarrow \rho_\varepsilon^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2} \text{ сильно в } L^1(\Omega) \text{ і слабо в } L^2(\Omega) \quad (2.31)$$

за теоремою Lebesgue–Vitali (див. теорему 1.2.3). Беручи цей факт до уваги і зауважуючи, що

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right|^2 dx &\stackrel{\text{див. (2.31)}}{\geq} \int_{\Omega} \left| \rho_\varepsilon^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2} \right|^2 dx, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_k - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx \right] &\stackrel{\text{див. (2.21), (2.24)}}{=} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_\varepsilon^0 - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx \right], \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_k|^2 dx &\stackrel{\text{див. (2.22)}}{\geq} \int_{\Omega} |v_\varepsilon^0|^2 dx, \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\rho_k| &\stackrel{\text{див. твердження 1.1.4}}{\geq} \int_{\Omega} |D\rho_\varepsilon^0|, \end{aligned}$$

бачимо, що функціонал  $J_\varepsilon$  є секвенційно  $\tau$ -напів-неперервним знизу. Тому

$$J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J_\varepsilon(\rho_k, v_k, u_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J_\varepsilon(\rho_k, v_k, u_k) = \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u),$$

а отже  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$  є розв'язком поставленої задачі.  $\square$

### 2.3. Асимптотичний аналіз параметризованих задач оптимального керування $(\mathcal{R}_\varepsilon)$

Головною метою даного розділу є показати, що вихідна задача оптимального керування  $(\mathcal{R})$  має непорожню множину розв'язків і при цьому деякі з них можуть бути досягнуті (у певному граничному сенсі) оптимальними розв'язками параметризованих задач  $(\mathcal{R}_\varepsilon)$ . Для цього ми використаємо концепцію варіаційної збіжності задач мінімізації з обмеженнями (див. [42, 43, 51, 52]) і вивчаємо асимптотичну поведінку сімейства задач оптимального керування  $(\mathcal{R}_\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Розпочнемо з наступних понять:

**Означення 2.3.1.** Нехай  $\{(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \subset BV(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  є довільною послідовністю. Таку послідовність називатимемо обмеженою, якщо

$$\sup_{\varepsilon>0} [\|\rho_\varepsilon\|_{BV(\Omega)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}] < +\infty.$$

**Означення 2.3.2.** Будемо казати, що обмежена послідовність кортежів  $\{(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \subset BV(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  є  $w$ -збіжною при  $\varepsilon \rightarrow 0$  і позначатимемо  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \xrightarrow{w} (\rho, v, u)$ , якщо  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (\rho, v, u)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тобто

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ слабко в } H^1(\Omega), \text{ сильно в } L^2(\Omega), \text{ і м.с. в } \Omega, \quad (2.32)$$

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ слабко в } L^2(\Omega), \quad (2.33)$$

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ слабко-* в } BV(\Omega) \text{ та м.с. в } \Omega; \quad (2.34)$$

і при цьому  $u_\varepsilon \rightarrow u$  сильно в  $W^{1,1}(\Omega)$ .

Значну роль у подальшому аналізі зіграє наступний технічний результат.

**Лема 2.3.1.** Нехай  $\{(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є  $\tau$ -збіжною послідовністю допустимих розв'язків задачі оптимального керування (2.12)–(2.17), і нехай

$(\rho, v, u) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  є її  $\tau$ -границею. Тоді  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \xrightarrow{w} (\rho, v, u)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , і при цьому  $(\rho, v, u)$  задовольняє умови

$$\rho \in \mathfrak{R}_{ad}, \quad v \in \mathfrak{V}_{ad}, \quad u \in H^1(\Omega), \quad (2.35)$$

$$0 \leq u(x) \leq M \quad \text{та} \quad \rho(x) \geq \frac{1}{1 + |\nabla u(x)|^2} \quad \text{м.с. в } \Omega, \quad (2.36)$$

$$\int_{\Omega} \rho (\nabla u, \nabla \varphi) \, dx + \alpha \int_{\Omega} u \varphi \, dx = \int_{\Omega} v \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (2.37)$$

*Доведення.* Покладемо в (2.20) тестовою функцією вираз  $u_\varepsilon - u$ . Тоді залучаючи аргументи з доведенням леми 2.2.1, можна встановити таку рівність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 \, dx &= - \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon - \rho) (\nabla u, \nabla u_\varepsilon - \nabla u) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \rho (\nabla u, \nabla u_\varepsilon - \nabla u) \, dx - \alpha \int_{\Omega} u_\varepsilon (u_\varepsilon - u) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} v_\varepsilon (u_\varepsilon - u) \, dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

де права частина прямує до нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тобто

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 \, dx = 0. \quad (2.39)$$

Приймаючи до уваги той факт, що  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$  при кожному  $\varepsilon > 0$ , а також  $\frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , бачимо, що

$$\rho_\varepsilon(x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} \right\} \geq \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} \quad \text{м.с. в } \Omega \quad (2.40)$$

при достатньо малих значеннях  $\varepsilon > 0$ . Отже, з урахуванням (2.39), маємо

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 \, dx \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 \, dx = 0. \quad (2.41)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u\|_{L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)}^2 &= \left( \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u| \, dx \right)^2 \\ &\leq \left( \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 \, dx \right) \left( \int_{\Omega} (1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2) \, dx \right) \\ &\leq \left( |\Omega| + \sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 \, dx, \end{aligned}$$

то з умови (2.41) знаходимо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u\|_{L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)}^2 &\leq \\ &\leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Таким чином, ми можемо охарактеризувати  $\tau$ -збіжні властивості (2.32)–(2.34) наступним чином: на додаток до (2.32)  $u_\varepsilon \rightarrow u$  сильно в  $W^{1,1}(\Omega)$ , і існує підпослідовність  $\{\varepsilon'\}$  така, що

$$\nabla u_{\varepsilon'} \rightarrow \nabla u \quad \text{м.с. в } \Omega. \quad (2.43)$$

Щоб встановити властивості (2.35)–(2.37), достатньо використати аргументи доведення твердження 2.2.1. Єдиний момент, який слід прояснити, полягає в тому, щоб показати наступне

$$\rho(x) \geq \frac{1}{1 + |\nabla u(x)|^2} \quad \text{м.с. в } \Omega. \quad (2.44)$$

Для цього слід зауважити, що  $\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отже

$$\rho_\varepsilon(x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} \right\} \geq \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} \quad \text{м.с. в } \Omega \quad (2.45)$$

при достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Щоб довести анонсовану властивість, залишається перейти до границі в (2.45), використовуючи поточкові збіжності (2.34) та (2.43).  $\square$

Наступним нашим наміром є обговорення питання, яке пов'язане з існуванням розв'язків вихідної задачі оптимального керування (2.9), (2.2)–(2.5) та їх досяжності оптимальними розв'язками параметризованих задач  $(\mathcal{R}_\varepsilon)$ . Для початку варто зауважити, що множина допустимих розв'язків  $\Xi$  в задачі (2.9), (2.2)–(2.5) не є порожньою. Дійсно, нехай  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  є такою функцією, що  $\varphi \not\equiv \text{const}$  в  $\Omega$ ,  $0 \leq \varphi(x) \leq M$  в  $\Omega$  і  $\partial_\nu \varphi = 0$  в  $\partial\Omega$ . Тоді стає зрозумілим той факт, що пара

$$(v, u) := \left( -\operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{1 + |\nabla \varphi|^2} \right) + \alpha \varphi, \varphi \right)$$

належить множині  $\Xi$ . Отже,  $\Xi \neq \emptyset$ .

Розпочнемо з наступного результату, який можна розглядати як прямий наслідок леми 2.3.1 та теореми 2.2.1.

**Твердження 2.3.1.** *Нехай  $u_d \in L^\infty(\Omega)$  є заданою функцією, і нехай  $\alpha, \lambda, \gamma, M > 0$  — задані сталі. Нехай також  $\{(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є послідовністю оптимальних розв'язків до регуляризованих задач оптимального керування (2.12)–(2.17), коли параметр  $\varepsilon$  прямує до нуля в межах строго монотонно спадної послідовності. Тоді знайдеться підпослідовність вихідної послідовності  $\{(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ , яку знову позначатимемо індексом  $\varepsilon$ , і розподілення  $\rho^0 \in \mathfrak{R}_{ad} \subset BV(\Omega)$ ,  $v^0 \in \mathfrak{V}_{ad}$  та  $u^0 \in H^1(\Omega)$  які задовольняють умовам (2.35)–(2.37) і при цьому  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \xrightarrow{w} (\rho^0, v^0, u^0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Наступним кроком нашого аналізу є показати, що пара  $(v^0, u^0)$  є оптимальною для вихідної задачі оптимального керування  $(\mathcal{R})$ . Для цього скористаємося деякими результатами з недавніх публікацій [26, 45].

**Теорема 2.3.1.** *Нехай  $(\rho^0, v^0, u^0) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  є  $w$ -кластерним кортежем (в сенсі означення 2.3.2) обраної послідовності оптимальних розв'язків для регуляризованих задач (2.12)–(2.17)  $\{(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ . Тоді*

$$(v^0, u^0) \in \Xi, \quad \rho^0(x) = \frac{1}{1 + |\nabla u^0(x)|^2} \text{ м.с. в } \Omega, \quad (2.46)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) = J(v^0, u^0) = \inf_{(v, u) \in \Xi} J(v, u). \quad (2.47)$$

*Доведення.* Нехай  $\varphi_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$  є функцією такою, що  $\partial_\nu \varphi_0 = 0$  on  $\partial\Omega$ . Тоді зрозуміло, що  $\hat{\rho} := (1 + |\nabla \varphi_0|^2)^{-1} \in \mathfrak{R}_{ad}$  і пара  $(\hat{\rho}, \hat{u})$  з  $\hat{u} := \varphi_0$  задовольняє нерівності (2.19) при достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Поклавши

$$\hat{v} := -\operatorname{div}(\hat{\rho} \nabla \hat{u}) + \alpha \hat{u} \text{ в } \Omega,$$

бачимо, що  $(\hat{\rho}, \hat{v}, \hat{u}) \in \Xi_\varepsilon$  для малих  $\varepsilon > 0$ . Отже,

$$\inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) = J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \leq J_\varepsilon(\hat{\rho}, \hat{v}, \hat{u})$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\widehat{u} - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla \widehat{u}|^2 dx \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |\widehat{v}|^2 dx + \int_{\Omega} |D\widehat{\rho}| = C < +\infty.
\end{aligned}$$

З цього та означення множини  $\mathfrak{R}_{ad}$  приходимо до наступного висновку:

$$\|u_{\varepsilon}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 4C + 2\|u_d\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \|\nabla u_{\varepsilon}^0\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)}^2 \leq \frac{2}{\lambda}C, \quad \|v_{\varepsilon}^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\gamma}C, \quad (2.48)$$

$$\int_{\Omega} |D\rho_{\varepsilon}^0| \leq C, \quad \|\rho_{\varepsilon}^0\|_{BV(\Omega)} \leq |\Omega| + C, \quad \int_{\Omega} \left| \rho_{\varepsilon}^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2} \right|^2 dx \leq C\varepsilon \quad (2.49)$$

при достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Таким чином послідовність  $\{(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0, u_{\varepsilon}^0) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$  є компактною відносно  $\tau$ -збіжності. Крім того, з огляду на твердження 2.3.1 та теорему Лебега 1.2.3, можемо припустити, що з точністю до підпослідовності,

$$\begin{aligned}
&(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0, u_{\varepsilon}^0) \xrightarrow{w} (\rho^0, v^0, u^0) \quad \text{та} \\
&\frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2} \rightarrow \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \quad \text{сильно в } L^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.
\end{aligned} \quad (2.50)$$

В результаті маємо

$$\rho_{\varepsilon}^0(x) - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0(x)|^2} \rightarrow \rho^0(x) - \frac{1}{1 + |\nabla u^0(x)|^2} \quad \text{м.с. в } \Omega \quad (2.51)$$

і  $(\rho_{\varepsilon}^0 - (1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2)^{-1}) \in L^{\infty}(\Omega)$ . Отже, за теоремою Лебега,

$$\rho_{\varepsilon}^0 - (1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2)^{-1} \rightarrow \rho^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \quad \text{сильно в } L^1(\Omega) \text{ та слабо в } L^2(\Omega).$$

Тепер, переходячи до границі в останньому доданку (2.49), отримуємо

$$\rho_{\varepsilon}^0(x) - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0(x)|^2} \rightarrow 0 \quad \text{м.с. в } \Omega$$

Поєднуючи цей факт з (2.51), знаходимо

$$\rho^0(x) = \frac{1}{1 + |\nabla u^0(x)|^2} \quad \text{м.с. в } \Omega.$$

Таким чином,

$$(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \xrightarrow{w} \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2}, v^0, u^0 \right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Беручи до уваги твердження 2.3.1 та умови (2.35)–(2.37), бачимо, що пара  $(v^0, u^0)$  є допустимим розв'язком для вихідної задачі оптимального керування  $(\mathcal{R})$ . Окрім того, як прямий наслідок властивостей (2.50), маємо таку оцінку

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^0 - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v^0|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \right) \right| = J(v^0, u^0). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Припустимо обернене, а саме — пара  $(v^0, u^0)$  не є оптимальною для задачі  $(\mathcal{R})$ . Тоді знайдеться інша пара  $(v^*, u^*) \in \Xi$  така, що

$$J(v^*, u^*) < J(v^0, u^0) < +\infty. \quad (2.53)$$

Поклавши  $\rho^* = (1 + |\nabla u^*|^2)^{-1}$  і взявши до уваги умову  $(v^*, u^*) \in \Xi$ , бачимо, що набір  $(\rho^*, v^*, u^*)$  є допустимим розв'язком для кожної із регуляризованих задач  $(\mathcal{R})$ , тобто

$$(\rho^*, v^*, u^*) \in \Xi_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1). \quad (2.54)$$

Отже,

$$\begin{aligned} J(v^0, u^0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^0 - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v^0|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \right) \right| \\ &\stackrel{\text{by (2.52)}}{\leq} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho^*, v^*, u^*) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^* - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v^*|^2 dx + \int_{\Omega} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^*|^2} \right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left| \rho^* - \frac{1}{1 + |\nabla u^*|^2} \right|^2 dx = J(v^*, u^*). \end{aligned}$$

Таким чином,  $J(v^0, u^0) \leq J(v^*, u^*)$ , а отже приходимо до суперечності з умовою (2.53). Отже гранична пара  $(v^0, u^0)$  є оптимальною для задачі керування  $(\mathcal{R})$ .  $\square$

### 2.3.1. Умови оптимальності для апроксимаційних задач

Нехай  $\varepsilon > 0$  є довільним і нехай  $A_\varepsilon(\Omega)$  строго додатним конусом в  $L^\infty(\Omega)$ :

$$A_\varepsilon(\Omega) = \left\{ \rho \in L^\infty(\Omega) : \rho(x) \geq \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \text{ м.с. в } \Omega \right\}.$$

Тоді  $A_\varepsilon(\Omega)$  є відкритою підмножиною в  $L^\infty(\Omega)$ . Відомо, що для кожного  $\varepsilon > 0$  задача (2.13)-(2.14) має єдиний розв'язок  $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$  при будь-яких  $\rho \in A_\varepsilon(\Omega)$  та  $v \in L^2(\Omega)$ . Нехай  $G_\varepsilon : A_\varepsilon(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$  є відображенням означеним як  $G_\varepsilon(\rho, v) = u_\varepsilon(\rho, v)$ , де  $u_\varepsilon(\rho, v)$  є розв'язком крайової задачі (2.13)-(2.14) при заданих  $(\rho, v)$ .

**Теорема 2.3.2.** *Відображення  $G_\varepsilon$  належить класу  $C^1$  і для довільних  $\rho \in A_\varepsilon(\Omega)$ ,  $\hat{\rho} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $v, \hat{v} \in L^2(\Omega)$ , елементи  $z_\rho = D_\rho G_\varepsilon(\rho, v)[\hat{\rho}]$  та  $z_v = D_v G_\varepsilon(\rho, v)[\hat{v}]$  є такими, що їх сума  $z_\rho + z_v$  є єдиним розв'язком в  $H^1(\Omega)$  рівняння*

$$-\operatorname{div}(\rho \nabla z) + \alpha z = \operatorname{div}(\hat{\rho} \nabla u_\varepsilon(\rho, v)) + \hat{v}, \quad (2.55)$$

де  $u_\varepsilon(\rho, v) = G_\varepsilon(\rho, v)$ .

*Доведення.* Залучимо теорему про неявну функцію. Для цього означимо функцію  $F : A_\varepsilon(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))'$  за таким правилом

$$F(\rho, v, u) = -\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \alpha u - v.$$

Одразу видно, що  $F$  належить до класу  $C^1$ . Крім того, частинна похідна  $\frac{\partial F}{\partial u}(\rho, v, u) : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))'$  є ізоморфізмом. Дійсно, так як

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\rho, v, u)[z] = -\operatorname{div}(\rho \nabla z) + \alpha z,$$

то ізоморфізм відображення  $\frac{\partial F}{\partial u}(\rho, v, u) : H^1(\Omega) \longrightarrow (H^1(\Omega))'$  випливає із оцінки  $\rho(x) \geq \varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)^{-1}$  м.с. в  $\Omega$  та леми Лакса-Мільграма. Більше того, при кожних  $\rho \in A_\varepsilon(\Omega)$ ,  $v \in L^2(\Omega)$  та  $u_\varepsilon(\rho, v) = G_\varepsilon(\rho, v)$ , маємо  $F(\rho, v, u_\varepsilon(\rho, v)) = 0$ . Отже, застосовуючи теорему про неявну функцію, ми бачимо, що для будь-яких  $\rho^0 \in A_\varepsilon(\Omega)$  і  $v^0 \in L^2(\Omega)$  існують околиці  $\mathcal{R}(\rho^0) \subset A_\varepsilon(\Omega)$ ,  $\mathcal{V}(v^0) \subset L^2(\Omega)$  та відображення  $g : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \longrightarrow H^1(\Omega)$  класу  $C^1$  такі, що  $F(\rho, v, g(\rho, v)) = 0 \ \forall (\rho, v) \in \mathcal{R} \times \mathcal{V}$ . Це відображення  $g$ , очевидно, збігається з  $G_\varepsilon$ , що доводить, що  $G_\varepsilon$  належить до класу  $C^1$ , а вираз для похідної випливає з рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(\rho, v, u_\varepsilon(\rho, v)) [D_\rho G_\varepsilon(\rho, v) [\widehat{\rho}] + D_v G_\varepsilon(\rho, v) [\widehat{v}]] + \\ + \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, v, u_\varepsilon(\rho, v)) [\widehat{\rho}] + \frac{\partial F}{\partial v}(\rho, v, u_\varepsilon(\rho, v)) [\widehat{v}] = 0. \end{aligned}$$

Звідси робимо висновок, що елемент

$$z = z_\rho + z_v = D_\rho G_\varepsilon(\rho, v) [\widehat{\rho}] + D_v G_\varepsilon(\rho, v) [\widehat{v}]$$

є єдиним розв'язком у  $H^1(\Omega)$  рівняння (2.55).  $\square$

Тепер зауважимо, що апроксимуючу задачу (2.13)-(2.14) можна записати у вигляді

$$\text{Minimize}_{(\rho, v) \in \mathfrak{A}_{ad} \times \mathfrak{V}_{ad}} I_\varepsilon(\rho, v) = I_{1,\varepsilon}(\rho, v) + I_{2,\varepsilon}(\rho, v), \quad (2.56)$$

де у функціоналі вартості  $I_\varepsilon$  ми розрізняємо два члени

$$\begin{aligned} I_{1,\varepsilon}(\rho, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(\rho, v) - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon(\rho, v)|^2 dx + \\ + \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left| \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(\rho, v)|^2} \right|^2 dx, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$I_{2,\varepsilon}(\rho, v) = \int_{\Omega} |D\rho|. \quad (2.58)$$

З диференційованості  $G_\varepsilon$  одразу випливає, що  $I_{1,\varepsilon}$  належить класу  $C^1$  і

$$I'_{1,\varepsilon}(\rho, v) [\widehat{\rho}, \widehat{v}] = \int_{\Omega} (u_\varepsilon(\rho, v) - u_d) (z_\rho + z_v) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v), \nabla z_{\rho} + \nabla z_v) \, dx + \\
& + \gamma \int_{\Omega} v \widehat{v} \, dx + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2} \right) \widehat{\rho} \, dx + \\
& + \frac{4}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2} \right) \frac{(\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v), \nabla z_{\rho} + \nabla z_v)}{(1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2)^2} \, dx
\end{aligned} \tag{2.59}$$

при

$$\begin{aligned}
z_{\rho} &= D_{\rho} G_{\varepsilon}(\rho, v) [\widehat{\rho}], \quad \forall \widehat{\rho} \in L^{\infty}(\Omega), \\
z_v &= D_v G_{\varepsilon}(\rho, v) [\widehat{v}], \quad \forall \widehat{v} \in L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Визначимо спряжений стан в  $\Omega$  наступним чином

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div}(\rho \nabla \mu_{\varepsilon}) + \mu_{\varepsilon} = -(u_{\varepsilon}(\rho, v) - u_d) + \lambda \operatorname{div}(\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)) + \\
& + \frac{4}{\varepsilon} \operatorname{div} \left( \left( \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2} \right) \frac{1}{(1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2)^2} \nabla u_{\varepsilon}(\rho, v) \right),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial \mu_{\varepsilon}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial \Omega. \tag{2.61}$$

Тоді залучаючи (2.55) з тестовою функцією  $\mu_{\varepsilon}$ , ми отримуємо

$$\int_{\Omega} \rho (\nabla \mu_{\varepsilon}, \nabla z) \, dx + \alpha \int_{\Omega} \mu_{\varepsilon} z \, dx = - \int_{\Omega} \widehat{\rho} (\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v), \nabla \mu_{\varepsilon}) \, dx + \int_{\Omega} \widehat{v} \mu_{\varepsilon} \, dx.$$

Поєднуючи цей факт зі слабким формулюванням крайової задачі (2.60)–(2.61), де  $z = z_{\rho} + z_v$ , маємо

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \widehat{\rho} (\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v), \nabla \mu_{\varepsilon}) \, dx - \int_{\Omega} \widehat{v} \mu_{\varepsilon} \, dx = \\
& = \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}(\rho, v) - u_d) z \, dx + \lambda \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v), \nabla z) \, dx + \\
& + \frac{4}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2} \right) \frac{1}{(1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2)^2} (\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v), \nabla z) \, dx \\
& \stackrel{\text{by (2.59)}}{=} I'_{1,\varepsilon}(\rho, v) [\widehat{\rho}, \widehat{v}] - \gamma \int_{\Omega} v \widehat{v} \, dx - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2} \right) \widehat{\rho} \, dx
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Отже,

$$\begin{aligned} I'_{1,\varepsilon}(\rho, v) [\hat{\rho}, \hat{v}] &= \int_{\Omega} \hat{\rho} (\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v), \nabla \mu_{\varepsilon}) dx - \int_{\Omega} \hat{v} \mu_{\varepsilon} dx + \gamma \int_{\Omega} v \hat{v} dx + \\ &+ \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}(\rho, v)|^2} \right) \hat{\rho} dx. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Тепер перейдемо до основного результату цього параграфу.

**Теорема 2.3.3.** *Нехай  $\varepsilon > 0$  та  $u_d \in L^2(\Omega)$  є заданими, і нехай  $(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0)$  є локальним розв'язком задачі (2.56)–(2.58) при наявності обмежень*

$$-\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \alpha u = v \quad \text{в } \Omega, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (2.65)$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(\Omega), \quad (2.66)$$

$$\rho \in \mathfrak{R}_{ad} := \left\{ h \in BV(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega) : \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \leq h(x) \leq 1 \text{ м.с. в } \Omega \right\}. \quad (2.67)$$

Тоді знайдуться функції  $u_{\varepsilon}^0$  та  $\mu_{\varepsilon}$  в  $H^1(\Omega)$  такі, що набір  $(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0, u_{\varepsilon}^0, \mu_{\varepsilon}^0)$  задовольняє систему рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\rho_{\varepsilon}^0 \nabla u_{\varepsilon}^0) + \alpha u_{\varepsilon}^0 = v_{\varepsilon}^0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u_{\varepsilon}^0}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\rho_{\varepsilon}^0 \nabla \mu_{\varepsilon}^0) + \alpha \mu_{\varepsilon}^0 = -(u_{\varepsilon}^0 - u_d) + \lambda \operatorname{div}(\nabla u_{\varepsilon}^0) + \\ \quad + \frac{4}{\varepsilon} \operatorname{div} \left( \left( \rho_{\varepsilon}^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2} \right) \frac{1}{(1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2)^2} \nabla u_{\varepsilon}^0 \right) & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial \mu_{\varepsilon}^0}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.69)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} (\rho - \rho_{\varepsilon}^0) (\nabla u_{\varepsilon}^0, \nabla \mu_{\varepsilon}^0) dx - \int_{\Omega} (v - v_{\varepsilon}^0) \mu_{\varepsilon}^0 dx + \gamma \int_{\Omega} v_{\varepsilon}^0 (v - v_{\varepsilon}^0) dx + \\ & + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\Omega} \left( \rho_{\varepsilon}^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2} \right) (\rho - \rho_{\varepsilon}^0) dx + \\ & + \int_{\Omega} |D\rho| - \int_{\Omega} |D\rho_{\varepsilon}^0| \geq 0, \quad \forall v \in \mathfrak{V}_{ad}, \quad \forall \rho \in \mathfrak{R}_{ad}. \end{aligned} \right. \quad (2.70)$$

*Доведення.* Оскільки  $(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0)$  є локальним розв'язком задачі (2.56)–(2.58), (2.64)–(2.66), то при заданих  $v \in \mathfrak{V}_{ad}$  та  $\rho \in \mathfrak{R}_{ad}$  маємо

$$I_{\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0 + \tau(\rho - \rho_{\varepsilon}^0), v_{\varepsilon}^0 + \tau(v - v_{\varepsilon}^0)) \geq I_{\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0)$$

для всіх достатньо малих  $\tau > 0$ .

Отже, в силу опуклості  $I_{2,\varepsilon}(\rho, v) = \int_{\Omega} |D\rho|$ , виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} 0 & \leq \frac{1}{\tau} (I_{\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0 + \tau(\rho - \rho_{\varepsilon}^0), v_{\varepsilon}^0 + \tau(v - v_{\varepsilon}^0)) - I_{\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0)) = \\ & = \frac{I_{1,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0 + \tau(\rho - \rho_{\varepsilon}^0), v_{\varepsilon}^0 + \tau(v - v_{\varepsilon}^0)) - I_{1,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0)}{\tau} + \\ & + \frac{I_{2,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0 + \tau(\rho - \rho_{\varepsilon}^0), v_{\varepsilon}^0 + \tau(v - v_{\varepsilon}^0)) - I_{2,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0)}{\tau} \leq \\ & \leq \frac{I_{1,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0 + \tau(\rho - \rho_{\varepsilon}^0), v_{\varepsilon}^0 + \tau(v - v_{\varepsilon}^0)) - I_{1,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0)}{\tau} + \\ & + I_{2,\varepsilon}(\rho, v) - I_{2,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0). \end{aligned}$$

Беручи тепер  $\tau \rightarrow 0$ , отримуємо

$$0 \leq I'_{1,\varepsilon} (\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0) [\rho - \rho_{\varepsilon}^0, v - v_{\varepsilon}^0] + \int_{\Omega} |D\rho| - \int_{\Omega} |D\rho_{\varepsilon}^0|.$$

Залишається скористатися виразом для  $I'_{1,\varepsilon}$ , який наведено в (2.63), і ми приходимо до системи оптимальності (2.68)–(2.70).  $\square$

## Висновки до розділу 2

У даному розділі досліджується задача оптимального керування для рівняння Перона-Маліка з крайовими умовами Неймана на межі області. За-

дача керування полягає в мінімізації розбіжності між заданим розподілом  $u_d \in L^2(\Omega)$  та поточним станом вихідної системи. Характерною рисою об'єкта керування є специфічний тип нелінійності в головній частині еліптичного оператора, при якому питання щодо розв'язаності крайової задачі при кожному допустимому керуванні залишається відкритим. Головними результатами цього розділу є:

1. Запропонована схема апроксимації поставленої задачі оптимального керування, яка ґрунтується на залученні параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного еліптичного оператора.
2. Показано, що кожна з апроксимаційних задач є коректно поставленою, має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, що утворена такими розв'язками, є компактною у відповідній топології.
3. Залучаючи непрямий підхід, отримано достатні умови розв'язаності вихідної задачі оптимального керування. А саме показано, що будь-яка кластерна точка послідовності оптимальних розв'язків апроксимаційних задач є оптимальною парою для вихідної задачі.
4. Наводиться схема побудови необхідних умов оптимальності для апроксимаційних задач та дається її строге обґрунтування.



## РОЗДІЛ 3

### Про існування розв’язків та їх апроксимацію в задачі оптимального керування для еволюційного рівняння Перона-Маліка

В даному розділі досліджуються питання існування розв’язків одного класу задач оптимального керування для еволюційної версії рівнянь Перона-Маліка, та методи їх апроксимації. Основні результати опубліковано в роботах [3, 4] та анонсовано в матеріалах конференції [7].

#### 3.1. Вступ

Нещодавно в контексті відновлення часового ряду для супутникових багатоспектральних зображень була запропонована наступна модель (див. [29])

$$u_t - \operatorname{div} (f(|\nabla u|) \nabla u) + (\nabla u, \mathbf{b}) = v \quad \text{в } Q_T = (0, T) \times \Omega, \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\partial_\nu u(t, x) = 0 \quad \text{на } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega, \quad (3.3)$$

де  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  є відкритою множиною з Ліпшиць-неперервною межею, а  $\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_{ad}$  та  $v \in \mathfrak{V}_{ad}$  є функціями керування такими, що

$$\mathfrak{B}_{ad} = \{\mathbf{b} \in L^\infty(Q)^2 \cap BV(Q)^2 : \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(Q)^2} \leq \kappa\}, \quad (3.4)$$

$$\mathfrak{V}_{ad} = \{v \in L^2(0, T; L^2(\Omega))\}. \quad (3.5)$$

Тут через  $\partial_\nu$  позначено похідну за зовнішньою одиничною нормаллю,  $f \in C^{1,1}(\mathbb{R}_+)$  є незростаючою функцією яка задовольняє умову  $f(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow +\infty$  та  $f(s) \rightarrow 1$  при  $s \rightarrow +0$ . Зокрема,

$$f(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2}. \quad (3.6)$$

Фактично, початково-крайову задачу Коші-Неймана (3.1)–(3.3) можна розглядати як деяке узагальнення еволюційної моделі Перона-Маліка [71],

яка була запропонована для уникнення розмитості зображень, а, насамперед, в тих місцях, які мають більшу ймовірність бути контурами чи краями. Таку ймовірність пропонується характеризувати величиною  $|\nabla u|^2$ .

Однак зазначена початково-крайова задача є некоректно поставленою через вироджену поведінку множника  $f(|\nabla u|)$ ,  $f(|\nabla u|) \rightarrow 0$  коли градієнт  $|\nabla u|$  прямує до нескінченності. Отже, рівняння (3.1) діє як стандартне рівняння конвекції-дифузії в тих областях, де величина градієнта  $u$  є малою, тоді як у тих точках, де величина градієнта досить значна, дифузія практично відсутня.

Крім того, можна показати, що рівняння (3.1), як приклад нелінійного рівняння дифузії в пористому середовищі, поєднує дифузійний потік вперед-назад із конвекцією (або дрейфом) функції  $u$  відповідно до поля швидкості  $b$ . Зокрема, оператор  $\operatorname{div}(f(|\nabla u|)\nabla u)$  передбачає пряму дифузію в областях, де квадрат величини градієнта функції  $u$  менший аніж 1, тоді як зворотна дифузія з'являється в області, де абсолютні значення градієнта перевищують 1.

Таким чином, модель (3.1) є прикладом некоректної задачі математичної фізики і цей факт може спричинити появу багатьох несподіваних ефектів в поведінці розв'язків таких задач [32]. Зокрема, на сьогодні невідомі результати щодо існування розв'язків для початково-крайової задачі (3.1)–(3.3). Щоб подолати цю проблему, багато авторів пропонували провести певну регуляризацию рівняння (3.1), яка б успадковувала його природну властивість щодо відновлення зображень, але мала б кращу математичну поведінку (див., наприклад, [1, 6, 21, 34, 38, 61] і посилання в ньому). Щоб гарантувати існування та єдиність розв'язку початково-крайової задачі (3.1)–(3.3), автори в [29] запропонували модифікувати рівняння (3.1) наступним чином

$$u_t - \operatorname{div}(K(t, x)\nabla u) + (\nabla u, \mathbf{b}) = v \quad \text{в } Q = (0, T) \times \Omega \quad (3.7)$$

де  $K(t, x) = f(|\nabla Y_\sigma^*|)$ ,  $\nabla Y_\sigma^* = \nabla G_\sigma * Y^*$  є згладженою версією градієнта

від  $Y^*$ ,  $G_\sigma \in$  двовимірним ядром Гауса,

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$$(\nabla G_\sigma * Y^*)(x) := \int_{\Omega} \nabla G_\sigma(x-y) Y^*(y) dy, \quad \forall x \in \Omega,$$

а щодо  $Y^* \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ , то цю функцію пропонується обрати як найпростішу модель еволюції зображення на інтервалі  $[0, T]$ . А саме, її визначають як розв'язок наступної задачі оптимізації

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial Y}{\partial t} \Big|_{t=(T_0+T_1)/2} - \operatorname{div} (f(|\nabla Y_\sigma|) \nabla Y) \Big|_{t=(T_0+T_1)/2} + \right. \\ \left. + \left( \nabla Y \Big|_{t=(T_0+T_1)/2}, \mathbf{b} \right) - v \right]^2 dx \\ + \int_{\Omega} [\lambda_1^2 |\nabla v|^2 + \lambda_2^2 (|\nabla \mathbf{b}_1|^2 + |\nabla \mathbf{b}_2|^2)] dx \rightarrow \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \mathbf{b} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^2)}} , \quad (3.8) \end{aligned}$$

Однак добре відомо, що модель Перона–Маліка з просторово регуляризованим градієнтом має кілька серйозних практичних і теоретичних недоліків. Перша проблема полягає в тому, що просторова регуляризація градієнта у вигляді  $f(|\nabla G_\sigma * u|)$  призводить до втрати точності у випадку, коли сигнал зашумлений, тобто в ньому присутній білий шум, див. наприклад [21]. Тоді шум створює дуже великі, теоретично необмежені, коливання градієнта  $\nabla u$ . У результаті згладжування, яке передбачено моделлю, не розв'язує проблему згладжування зображення, оскільки з'являться межі, які будуть породженими шумовими добавками.

Другим недоліком моделі Перона–Маліка з регуляризованим градієнтом (див. також моделі (3.7), (3.2), (3.3)) є те, що просторово-інваріантне гаусівське згладжування всередині дивергентного члена має тенденцію зміщувати контурність в  $u$  в сторону від її початкового розташування. Див. [77], де це питання детально вивчається. Цей ефект, відомий як контурна дислокація, може бути згубним, особливо в контексті проблеми виявлення точної локації меж і їх застосування до дистанційного зондування та моніторингу земної поверхні.

З огляду на це, наш головний інтерес у цьому розділі полягає у дослідженні рівняння (3.1) та відповідної задачі оптимізації без просторово-інваріантного гаусового згладжування коефіцієнтів в дивергентному члені основного оператора. Маючи це на увазі, розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$(\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(T) - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dxdt + \\ + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\omega} |v|^2 dxdt + \int_{Q_T} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right) \right| \quad (3.9)$$

за наявності таких обмежень

$$u_t - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{1 + |\nabla u|^2} \right) = v \chi_{\omega} \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \quad (3.10)$$

$$\partial_{\nu} u = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (3.11)$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.12)$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad (3.13)$$

де  $T > 0$ ,  $\Omega$  є обмеженою відкритою підмножиною  $\mathbb{R}^N$  з Ліпшиць-неперервною межею,  $N \geq 2$ ,  $\omega$  є відкритою непорожньою підмножиною  $\Omega$ , символ  $\partial_{\nu}$  означає похідну за зовнішньою одиничною нормаллю,  $\chi_{\omega} = \begin{cases} 1, & x \in \omega, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \omega \end{cases}$  є характеристичною функцією множини  $\omega$ , функції  $u_0$  та  $u_d$  з  $L^2(\Omega)$  вважаються заданими,  $\lambda, \gamma$  — додатні сталі, а функція  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  виступає в якості керування.

Зауважимо, що на сьогоднішній день в літературі задачі керування для незгладженого рівняння Перона-Маліка приділено дуже мало уваги. Різноманітні постановки задач керування (3.9)–(3.13) для нелінійного рівняння дифузії в пористому середовищі в основному мотивуються тим спостереженням, що їх можна успішно застосувати до обробки зображень, зокрема, до подолання сукупності гаусового та імпульсного шумів із збереженням контурів і текстури зображення (див., наприклад, [3] і посилання в ньому). З іншого боку, новизна запропонованої в даній роботі задачі оптимального керування полягає в тому, що ми залучаємо до оптимізації нелінійне

рівняння з досить специфічним типом нелінійності (а саме з неопуклою та некоерцитивною складовою в дивергентному члені). Через це ситуація стає ще делікатнішою, оскільки (3.10)–(3.12) не є коректною за Адамаром задачею для даного типу нелінійності.

Як зазначалося вище, оператор  $\operatorname{div} (f(|\nabla u|) \nabla u)$  з функцією  $f$ , яка задана правилом (3.6), є прикладом нелінійного оператора в дивергентній формі з виродженим типом нелінійності. Більше того, оскільки функція  $\mathbb{R}^N \ni s \mapsto \frac{s}{1+|s|^2} \in \mathbb{R}^N$  не є ані монотонною ані коерцитивною, проблема розв’язаності початково-крайової задачі (3.10)–(3.12) та єдиність її розв’язків залишається відкритою. Маючи це на увазі, будемо казати, що  $(v, u)$  є допустимою парою для задачі (3.9)–(3.13), якщо

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad J(v, u) < +\infty, \quad (3.14)$$

і при цьому справджується інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left( -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{1 + |\nabla u|^2} \right) dx dt = \\ = \int_0^T \int_{\omega} v \varphi dx dt + \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(0, x) dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

для будь-якої функції  $\varphi \in \Phi$ , де

$$\Phi = \{ \varphi \in C^1(\overline{Q_T}) : \varphi(T, \cdot) = 0 \text{ в } \Omega \text{ та } \partial_{\nu} \varphi = 0 \text{ на } (0, T) \times \partial\Omega \}.$$

Щоб з’ясувати, в якому сенсі розв’язок такої задачі приймає початкову умову  $u(0, \cdot) = u_0$ , наведемо такий результат.

**Твердження 3.1.1.** *Нехай  $(v, u)$  є допустимою парою для задачі (3.9)–(3.13). Тоді, для будь-якої тестової функції  $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , скалярна функція  $h(t) = \int_{\Omega} u(t, x) \eta(x) dx$  належить класу  $W^{1,1}(0, T)$  і при цьому  $h(0) = \int_{\Omega} u_0(x) \eta(x) dx$ .*

*Доведення.* Покладемо  $\varphi(t, x) = \eta(x) \zeta(t)$ , де  $\zeta(\cdot)$  є гладкою функцією на  $[0, T]$  і  $\zeta(T) = 0$ . Тоді зрозуміло, що  $\varphi \in \Phi$ , а отже інтегральна тотожність (3.15) породжує рівність

$$\int_0^T \left[ -h(t)\zeta'(t) + \underbrace{\left( \int_{\Omega} \frac{(\nabla u, \nabla \eta)}{1 + |\nabla u|^2} dx - \int_{\omega} \eta v dx \right)}_{H(t)} \zeta(t) \right] dt = \underbrace{\left( \int_{\Omega} u_0 \eta dx \right)}_k \zeta(0). \quad (3.16)$$

Оскільки  $h \in L^1(0, T)$  і  $H \in L^1(0, T)$ , то з (3.16) знаходимо:  $h \in W^{1,1}(0, T)$ , тобто функція  $h(t)$  є абсолютно неперервною на  $[0, T]$ . Більше того, з (3.16) бачимо, що  $h(0) = k$ .  $\square$

Для більшої зручності множину всіх можливих розв'язків задачі (3.9)–(3.13) позначимо через  $\Xi$ . Через вироджену поведінку множника  $f(|\nabla u|)$ , структура множини  $\Xi$  та її основні топологічні властивості загалом невідомі.

В зв'язку з цим, основна увага в цьому розділі полягає в розробці такої схеми апроксимації вихідної задачі оптимального керування, яка б дозволила скористатися непрямим підходом до розв'язання проблеми існування оптимальних розв'язків та побудови процедури для їх ефективної апроксимації. Маючи це на увазі, ми показуємо, що вихідну задачу оптимального керування (3.9)–(3.13) можна ефективно апроксимувати спеціальною сім'єю задач оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь із фіктивним  $BV$ -керуванням в основній частині дивергентного оператора  $\operatorname{div}(\rho \nabla u)$ . Хоча концепція фіктивних керувань не є новою в літературі, у цьому розділі ми використовуємо її в дещо іншому форматі, а саме поєднуємо її з поточною збіжністю градієнтів розв'язків певного класу параболічних рівнянь.

### 3.2. Попередні результати

У цьому розділі ми наводимо кілька технічних результатів, які можна розглядати як певну специфікацію добре відомих результатів Boccardo та Murat

(див. теореми 1.3.1 та 1.3.2)

**Твердження 3.2.1.** *Нехай*

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{слабко в } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.17)$$

*Припустимо, що*

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = h_k \quad \text{в } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.18)$$

*де  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою послідовністю в  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Тоді*

$$u_k \rightarrow u \quad \text{сильно в } L^2_{loc}(0, T; L^2_{loc}(\Omega)). \quad (3.19)$$

*Доведення.* Для довільних тестових функцій  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$  та  $\eta \in C_0^\infty(0, T)$ , покладемо

$$\phi(t, x) = \eta(t)\psi(x), \quad z_k = \phi u_k, \quad \alpha_k = \phi h_k + \frac{\partial \phi}{\partial t} u_k.$$

Тоді, в силу щільності включення  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ , бачимо, що для будь-якої відкритої множини  $S$  для якої  $\text{supp}(\psi) \subset S \subset \Omega$ , є справедливими властивості

$$\begin{aligned} z_k(t, \cdot) \in H_0^1(S) \quad \text{і} \quad \frac{\partial \phi(t, \cdot)}{\partial t} u_k(t, \cdot) \in H^{-1}(S) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{м.с. в } t \in (0, T), \\ \frac{\partial z_k}{\partial t} = \alpha_k \quad \text{в } \mathcal{D}'((0, T) \times S), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} \|z_k\|_{L^2(0, T; H_0^1(S))} \leq C, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\alpha_k\|_{L^2(0, T; H^{-1}(S))} \leq C \end{aligned} \quad (3.20)$$

при деякому  $C > 0$ .

Крім того, усі ці функції мають своїми носіями множини, які належать компактній підмножині в  $(0, T) \times S$ .

Оскільки вкладення  $H_0^1(S) \hookrightarrow L^2(S)$  та  $L^2(S) \hookrightarrow H^{-1}(S)$  є компактними, то за лемою Aubin'а (див. Розділ 8, Властивість 4 в [76]) та умовами (3.20), отримуємо, що послідовність  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є компактною в  $L^2(0, T; L^2(S))$ , що і доводить бажану властивість (3.19).  $\square$

**Твердження 3.2.2.** Нехай  $\varepsilon \in (0, 1)$  і  $K \in (0, \infty)$  є заданими величинами.

Припустимо, що послідовності

$$\begin{aligned} \{u_k\}_{k=1}^{\infty} &\subset L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \text{та} \quad \{\rho_k\}_{k=1}^{\infty} &\subset BV(Q_T) \cap L^\infty(Q_T) \end{aligned} \quad (3.21)$$

є обмеженими і такими, що

$$u_k \rightharpoonup u \text{ слабко в } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.22)$$

$$v_k \rightharpoonup v \text{ слабко в } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.23)$$

$$\rho_k \rightharpoonup \rho \text{ слабко-* в } BV(Q_T) \text{ і м.с. в } Q_T, \quad (3.24)$$

$$\rho_k \geq \varepsilon \text{ м.с. в } Q_T, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_k \nabla u_k) = v_k \text{ в } \mathcal{D}'(Q_T), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.26)$$

Тоді

$$\nabla T_K(u_k) \rightarrow \nabla T_K(u) \text{ сильно в } L_{loc}^2(0, T; L_{loc}^2(\Omega))^N, \quad (3.27)$$

де  $T_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є оператором зрізки на висоті  $K$  і який означено за правилом

$$T_K(s) = s, \quad \text{якщо } |s| \leq K, \quad T_K(s) = Ks/|s|, \quad \text{якщо } |s| \geq K.$$

*Доведення.* Позначимо операцію дуального спарювання між просторами

$$L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{та} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

як  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q_T}$ . Покладемо  $S_K(u) = \int_0^u T_K(s) ds$ . Тоді, використовуючи ефект наближення за допомогою згортки, легко показати:

для довільних  $\phi \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  та  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$

з  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , маємо

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \phi T_K(u) \right\rangle_{Q_T} = - \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi}{\partial t} S_K(u) dx dt. \quad (3.28)$$

Пов'яжемо з довільною компактною множиною  $A \subset Q_T = (0, T) \times \Omega$  функцію  $\phi_A \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  так, щоби  $0 \leq \phi_A(t, x) \leq 1$  в  $Q_T$  і  $\phi_A(t, x) = 1$  на  $A$ . Тоді, поклавши в (3.26) тестовою функцією

$$z_k = [T_K(u_k) - T_K(u)] \phi_A,$$



отримаємо

$$\left\langle \frac{\partial u_k}{\partial t}, \phi_A T_K(u_k) \right\rangle_{Q_T} \stackrel{\text{за (3.28)}}{=} - \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi_A}{\partial t} S_K(u_k) dx dt$$

а отже, з (3.26) знаходимо

$$\begin{aligned} & - \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi_A}{\partial t} S_K(u_k) dx dt - \left\langle \frac{\partial u_k}{\partial t}, \phi_A T_K(u) \right\rangle_{Q_T} \\ & + \iint_{Q_T} \phi_A \rho_k (\nabla u_k, \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ & + \iint_{Q_T} [T_K(u_k) - T_K(u)] \rho_k (\nabla u_k, \nabla \phi_A) dx dt \\ & = \int_0^T \langle v_k, [T_K(u_k) - T_K(u)] \phi_A \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Як впливає із зроблених вище припущень (3.21)–(3.24), послідовність  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  з

$$h_k = \operatorname{div}(\rho_k \nabla u_k) + v_k$$

є обмеженою в  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Отже, за твердженням 3.2.1 маємо, що з точністю до підпослідовності мають місце такі властивості

$$\begin{aligned} T_K(u_k) - T_K(u) & \rightharpoonup 0 \quad \text{слабко в } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ & \text{сильно в } L_{loc}^2(Q_T) \text{ та м.с. в } Q_T. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Тим самим показано, що останній доданок в (3.29) прямує до нуля при  $k \rightarrow \infty$ .

Більше того, залучаючи той факт, що  $\rho_k(x) - \rho(x) \rightarrow 0$  м.с. в  $Q_T$  а послідовність  $\{(\nabla u_k, \nabla \phi_A)\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в  $L^2(Q_T)$ , отримуємо

$$\iint_{Q_T} [T_K(u_k) - T_K(u)] \rho_k (\nabla u_k, \nabla \phi_A) dx dt \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t} S_K(u_k) = T_K(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial t} \quad \text{в } \mathcal{D}'((0, T) \times \Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

то з твердження 3.2.1 випливає, що  $S_K(u_k) \rightarrow S_K(u)$  сильно в  $L_{loc}^2(Q_T)$ .

Отже

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi_A}{\partial t} S_K(u_k) dx dt = \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi_A}{\partial t} S_K(u) dx dt.$$

Стосовно другого доданку в (3.29), бачимо, що  $\phi_A T_K(u) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  і розподілення  $\frac{\partial u_k}{\partial t} \in$  обмеженими в  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Тим самим

$$\left\langle \frac{\partial u_k}{\partial t}, \phi_A T_K(u) \right\rangle_{Q_T} \rightarrow \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \phi_A T_K(u) \right\rangle_{Q_T} =$$

$$\stackrel{\text{за (3.28)}}{=} - \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi_A}{\partial t} S_K(u) dx dt \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Таким чином показано, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A \rho_k (\nabla u_k, \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt = 0. \quad (3.31)$$

Беручи цей факт до уваги, зауважимо, що

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \phi_A \rho |\nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)|^2 dx dt \\ &= \iint_{Q_T} \phi_A (\rho - \rho_k) (\nabla T_K(u_k), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ &+ \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla T_K(u_k) - \rho \nabla T_K(u), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ &= \iint_{Q_T} \phi_A (\rho - \rho_k) (\nabla T_K(u_k), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ &+ \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla T_K(u_k), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ &- \iint_{Q_T} \phi_A (\rho \nabla T_K(u), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ &= \iint_{Q_T} \phi_A (\rho - \rho_k) (\nabla T_K(u_k), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ &+ \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla u_k, \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \\ &- \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla u, \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) \chi_{\Lambda_k} dx dt \\ &- \iint_{Q_T} \phi_A (\rho \nabla T_K(u), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt, \end{aligned} \quad (3.32)$$

де через  $\chi_{\Lambda_K}$  позначено характеристичну функцію множини

$$\Lambda_k := \{(t, x) \in Q_T : |u_k(t, x)| > K\}.$$

З огляду на (3.24), (3.30), та (3.31), маємо

$$\iint_{Q_T} \phi_A (\rho - \rho_k) (\nabla T_K(u_k), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) dx dt \stackrel{\text{за лемою 1.2.2}}{\rightarrow} 0,$$

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla u_k, \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) \, dxdt \xrightarrow{\text{за (3.31)}} 0, \\ & \iint_{Q_T} \phi_A (\rho \nabla T_K(u), \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) \, dxdt \xrightarrow{\text{за (3.30)}} 0. \end{aligned}$$

В результаті з (3.32) випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A \rho |\nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)|^2 \, dxdt = \\ = - \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla u, \nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)) \chi_{\Lambda_k} \, dxdt. \end{aligned}$$

Використовуючи той факт, що  $\chi_{\Lambda_k} \nabla T_K(u_k) = 0$  майже скрізь в  $Q_T$ , бачимо, що

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A \rho |\nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)|^2 \, dxdt = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla u, \nabla T_K(u)) \chi_{\Lambda_k} \, dxdt. \end{aligned}$$

Крім того, з огляду на слабку збіжність (3.22) та теорему Лебега, отримуємо

$$\phi_A \nabla T_K(u) \chi_{\Lambda_k} \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L^2(Q_T)^N.$$

Отже,

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A \rho |\nabla T_K(u_k) - \nabla T_K(u)|^2 \, dxdt \geq \varepsilon \|T_K(u_k) - \nabla T_K(u)\|^2.$$

тим самим приходимо до анонсованої властивості (3.27).  $\square$

Основний результат твердження 3.2.2 можна уточнити у такий спосіб:

**Теорема 3.2.1.** *Нехай  $\varepsilon \in (0, 1)$  є заданим і нехай*

$$\begin{aligned} \{u_k\}_{k=1}^\infty &\subset L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \{v_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ \text{та} \quad \{\rho_k\}_{k=1}^\infty &\subset BV(Q_T) \cap L^\infty(Q_T) \end{aligned} \quad (3.33)$$

*є обмеженими послідовностями, які задовольняють умови (3.22)–(3.26).*

*Тоді*

$$\nabla u_k \rightarrow \nabla u \quad \text{сильно в } L^q(0, T; L^q(\Omega))^N \quad \text{для довільного } q \in [1, 2). \quad (3.34)$$

*Доведення.* Оберемо довільну компактну підмножину  $A \subset Q_T = (0, T) \times \Omega$  і пов'яжемо з нею гладку функцію  $\phi_A \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  таку, що  $0 \leq \phi_A(t, x) \leq 1$  в  $Q_T$  та  $\phi_A(t, x) = 1$  на  $A$ . У відповідності до вихідних припущень функції  $\{v_k\}_{k=1}^\infty$  і  $v$  належать простору  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad \text{та} \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

Тому, щоб виконати звичайне інтегрування за частинами у варіаційній рівності (3.26), можна скористатися  $T_K(u_k - u)\phi_A$  як тестовою функцією. Беручи до уваги подання (3.28) і використовуючи той факт, що

$$\frac{\partial(u_k - u)}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_k \nabla u_k - \rho \nabla u) = v_k - v \quad \text{in } \mathcal{D}'(Q_T), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} & - \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi_A}{\partial t} S_K(u_k - u) \, dxdt + \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla u_k - \rho \nabla u, \nabla T_K(u_k - u)) \, dxdt + \\ & + \iint_{Q_T} [T_K(u_k - u)] (\rho_k \nabla u_k - \rho \nabla u, \nabla \phi_A) \, dxdt = \\ & = \int_0^T \langle v_k - v, [T_K(u_k - u)] \phi_A \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \, dt. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Завдяки твердженню 3.2.1, маємо

$$T_K(u_k - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабко в } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \text{ сильно в } L_{loc}^2(Q_T) \quad (3.36)$$

та м.с. в  $Q_T$ ,

$$S_K(u_k - u) \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L_{loc}^2(Q_T). \quad (3.37)$$

Тоді, з огляду на (3.23), перший і останній доданки в (3.35) прямують до нуля при  $k \rightarrow \infty$ . Більше того, користуючись тим, що  $\{\rho_k\}_{k=1}^\infty \subset L^\infty(Q_T)$ ,  $\rho_k(x) - \rho(x) \rightarrow 0$  м.с. в  $Q_T$ , а послідовність  $\{(\nabla u_k - \nabla u, \nabla \phi_A)\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в  $L^2(Q_T)$ , за теоремою Лебега отримуємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} [T_K(u_k - u)] (\rho_k \nabla u_k - \rho \nabla u, \nabla \phi_A) \, dxdt = \\ & = \iint_{Q_T} [T_K(u_k - u)] \rho_k (\nabla u_k - \nabla u, \nabla \phi_A) \, dxdt + \\ & + \iint_{Q_T} [T_K(u_k - u)] (\rho_k - \rho) (\nabla u, \nabla \phi_A) \, dxdt \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Отже, переходячи до границі в (3.35) коли  $k$  прямує в нескінченність, знаходимо

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k \nabla u_k - \rho \nabla u, \nabla T_K(u_k - u)) \, dxdt \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A \rho (\nabla u_k - \nabla u, \nabla T_K(u_k - u)) \, dxdt \\
&\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k - \rho) (\nabla u_k, \nabla T_K(u_k - u)) \, dxdt \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A \rho (\nabla(u_k - u), \nabla T_K(u_k - u)) \, dxdt = 0, \quad (3.39)
\end{aligned}$$

де

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_k - \rho) (\nabla u_k, \nabla T_K(u_k - u)) \, dxdt = 0$$

за лемою 1.2.2. Поклавши

$$E_k := \phi_A \rho |\nabla(u_k - u)|^2 \quad \text{в } Q_T$$

та розбивши множину  $A$  на дві підмножини

$$\begin{aligned}
B_k^K &= \{(t, x) \in A : |u_k(t, x) - u(t, x)| \leq K\}, \\
G_k^K &= \{(t, x) \in A : |u_k(t, x) - u(t, x)| > K\},
\end{aligned}$$

бачимо, що

$$\begin{aligned}
\iint_A E_k^\theta \, dxdt &= \iint_{B_k^K} E_k^\theta \, dxdt + \iint_{G_k^K} E_k^\theta \, dxdt \\
&\leq \left( \iint_{B_k^K} E_k \, dxdt \right)^\theta |B_k^K|^{1-\theta} + \left( \iint_{G_k^K} E_k \, dxdt \right)^\theta |G_k^K|^{1-\theta}
\end{aligned}$$

за нерівністю Hólder'а з параметром  $\theta \in (0, 1)$ . Оскільки для фіксованого  $K$ , маємо  $|G_k^K| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , і так як послідовність  $\{\rho \nabla(u_k - u)\}_{k=1}^\infty$  обмежена в  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)$ , то  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|E_k\|_{L^1(Q_T)} < \infty$ , а отже,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \iint_{G_k^K} E_k \, dxdt \right)^\theta |G_k^K|^{1-\theta} = 0.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_A E_k^\theta dxdt \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \left( \iint_{B_k^K} E_k dxdt \right)^\theta |B_k^K|^{1-\theta} \right] \\
&= \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} \phi_A \rho (\nabla(u_k - u), \nabla T_K(u_k - u)) dxdt \right)^\theta \lim_{k \rightarrow \infty} |B_k^K|^{1-\theta} \stackrel{\text{by (3.39)}}{=} 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

В результаті з (3.40) випливає, що  $E_k^\theta \rightarrow 0$  сильно в  $L^1(A)$ . Отже, для послідовності компактних множин  $A \subset Q_T$ , існує підпослідовність  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  така, що

$$E_{k_n}(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{для майже всіх } (t, x) \in Q_T.$$

Тоді з оцінки (3.25) отримуємо

$$\nabla u_{k_n}(t, x) \rightarrow \nabla u(t, x) \quad \text{для майже всіх } (t, x) \in Q_T \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

На завершення доведення залишається зауважити, що оскільки послідовність  $\{\nabla u_k\}_{k=1}^\infty$  є обмеженою в просторі  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)$ , то як випливає з теореми Vitaly (див. лему 1.2.1), отримуємо

$$\nabla u_k \rightarrow \nabla u \quad \text{сильно в } L^q(Q_T).$$

□

### 3.3. Схема регуляризації вихідної задачі оптимального керування

Розглянемо наступну сукупність апроксимаційних задач оптимального керування

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}_\varepsilon) \quad \text{Мінімізувати } J_\varepsilon(\rho, v, u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |u(T) - u_d|^2 dx + \\
&+ \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_\omega |v|^2 dxdt + \\
&+ \int_{Q_T} |D\rho| + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Omega \left| \rho - \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \right|^2 dxdt \quad (3.41)
\end{aligned}$$

за таких обмежень

$$u_t - \operatorname{div}(\rho \nabla u) = v \chi_\omega \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (3.43)$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.44)$$

$$v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad (3.45)$$

$$\rho \in \mathfrak{R}_{ad} := \{h \in BV(Q_T) \cap L^\infty(Q_T) : 0 \leq h(t, x) \leq 1 \text{ м.с. в } Q_T\}. \quad (3.46)$$

Будемо казати, що кортеж  $(\rho, v, u)$  є допустимим розв'язком для задачі (3.41)–(3.46), якщо

$$\rho \in \mathfrak{R}_{ad}, \quad v \in \mathfrak{V}_{ad}, \quad u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.47)$$

$$\rho(t, x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u(t, x)|^2} \right\} \text{ м.с. в } Q_T, \quad (3.48)$$

і при цьому інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (-\varphi_t u + \rho (\nabla u, \nabla \varphi)) \, dx dt = \\ = \int_0^T \int_\omega v \varphi \, dx dt + \int_\Omega u_0(x) \varphi(0, x) \, dx \end{aligned} \quad (3.49)$$

є вірною при всіх  $\varphi \in \Psi$ , де

$$\Psi = \{ \varphi \in C^1(\overline{Q_T}) : \varphi(T, \cdot) = 0 \text{ в } \Omega \text{ та } \partial_\nu \varphi = 0 \text{ на } (0, T) \times \partial\Omega \}.$$

Позначимо множину всіх допустимих розв'язків через  $\Xi_\varepsilon$ .

**Зауваження 3.3.1.** Покажемо, що  $\Xi_\varepsilon \neq \emptyset$  при кожному  $\varepsilon > 0$ . Дійсно, взявши  $z = e^{-\alpha t} u$ , маємо таку початково-крайову задачу для  $z$ :

$$z_t + \alpha z - \operatorname{div} \hat{A} = e^{-\alpha t} v \chi_\omega, \quad z \Big|_{t=0} = u_0, \quad (3.50)$$

де вектор-функція  $\hat{A} = \rho e^{\alpha t} \nabla z$  задовольняє умовам монотонності, коерцитивності та обмеженості

$$\left( \hat{A}(t, x, \xi) - \hat{A}(t, x, \eta), \xi - \eta \right) \geq 0, \quad \left( \hat{A}(t, x, \xi), \xi \right) \geq \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} |\xi|^2,$$

$$\left(\widehat{A}(t, x, \xi), \xi\right) \leq e^{\alpha T} |\xi|^2,$$

а оператор  $Bz = \alpha z - \operatorname{div} \widehat{A}$  є коерцитивним в просторі  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , тобто

$$\begin{aligned} \langle Bz, z \rangle_{L^2(0, T; (H^1(\Omega))^*); L^2(0, T; H^1(\Omega))} &\geq \alpha \|z\|_{L^2(Q_T)}^2 + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \|\nabla z\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)}^2 \geq c_0 \|z\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

Отже задача (3.50) має єдиний розв'язок при кожному  $v \in \mathfrak{V}_{ad}$  [60]. Що стосується початково-крайової задачі (3.42)–(3.46), та такий самий висновок можна отримати помноживши  $z$  на  $e^{\alpha t}$ . Крім того, у цьому випадку виконується інтегральна тотожність (3.49) для будь-якої функції  $\varphi \in \Psi$ , а також є валідною енергетична рівність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 dx dt = \\ = 2 \int_0^t \int_{\omega} v u dx dt + \int_{\Omega} u_0^2 dx, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Наступним кроком є дослідження топологічних властивостей множини допустимих розв'язків  $\Xi_{\varepsilon}$ .

**Означення 3.3.1.** *Послідовність  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}}$  будемо називати обмеженою, якщо*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} [\|\rho_k\|_{BV(Q_T)} + \|v_k\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} + \|u_k\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}] < +\infty.$$

**Означення 3.3.2.** *Будемо казати, що обмежена послідовність допустимих розв'язків  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}}$   $\tau$ -збігається до  $(\rho, v, u) \in BV(Q_T) \times L^2(0, T; L^2(\omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , якщо виконуються умови*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ слабко в } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.52)$$

$$v_k \rightharpoonup v \text{ слабко в } L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad (3.53)$$

$$\rho_k \rightharpoonup \rho \text{ слабко-* в } BV(Q_T) \text{ та м.с. в } Q_T \quad (3.54)$$



**Зауваження 3.3.2.** Як впливає з теореми 3.2.1, якщо послідовність допустимих розв'язків  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  є  $\tau$ -збіжною і  $(\rho_k, v_k, u_k) \xrightarrow{\tau} (\rho, v, u)$ , то  $\nabla u_k \rightarrow \nabla u$  сильно в  $L^q(0, T; L^q(\Omega))^N$  для всіх  $q \in [1, 2)$ . Отже, переходячи за необхідністю до підпослідовності, можна стверджувати, що  $\nabla u_k(t, x) \rightarrow \nabla u(t, x)$  майже скрізь в  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ .

**Зауваження 3.3.3.** Як безпосередньо впливає з (3.49), якщо  $(\rho, v, u)$  є допустимим розв'язком задачі (3.41)–(3.46), то рівність

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_k \nabla u_k) = \chi_\omega v_k \quad \text{in } \mathcal{D}'(Q_T)$$

справджується в сенсі розподілень для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . Більше того, якщо  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою послідовністю в сенсі означення 3.3.1, то  $\operatorname{div}(\rho_k \nabla u_k) + \chi_\omega v_k \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ . Отже,  $u_k \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$  (див. [75, Твердження III.1.2]) і за результатами J.L. Lions'a [64, Розділ 1, Теорема 5.1] (див. також узагальнення цього результату в [76]), банахів простір

$$W = \left\{ \varphi : \varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\}$$

який наділено нормою графіка

$$\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))},$$

компактно вкладається в  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

Таким чином, перший доданок у цільовому функціоналі (3.41) є коректно визначеним на множині допустимих розв'язків. Отже, якщо  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою послідовністю в  $W$ , а  $u_k \rightharpoonup u$  слабо в  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , то  $u_k \rightarrow u$  сильно в  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  і, як наслідок,  $u_k(T, \cdot) \rightarrow u(T, \cdot)$  сильно в  $L^2(\Omega)$ .

Перш ніж продовжити далі, встановимо важливу властивість.

**Твердження 3.3.1.** Для кожного  $\varepsilon \in (0, 1)$  множина  $\Xi_\varepsilon$  є секвенційно замкненою відносно  $\tau$ -збіжності.

*Доведення.* Нехай  $\{(\rho_k, v_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi_\varepsilon$  є  $\tau$ -збіжною послідовністю допустимих розв'язків для задачі оптимального керування (3.41)–(3.46). Нехай  $(\rho, v, u)$  є її  $\tau$ -границею. Покажемо, що  $(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon$ .

Оскільки включення  $\chi_\omega v \in \mathfrak{V}_{ad} := L^2(0, T; L^2(\Omega))$  та  $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  очевидні, то покажемо, що умова (3.25) виконується при обраному  $\varepsilon > 0$ . Дійсно, приймаючи до уваги зауваження 3.3.2, можна вважати, що з точністю до підпослідовності справедливо

$$u_k(t, x) \rightarrow u(t, x) \quad \text{і} \quad \frac{1}{1 + |\nabla u_k(t, x)|^2} \rightarrow \frac{1}{1 + |\nabla u(t, x)|^2} \quad \text{м.с. в } Q_T.$$

Отже, за означенням  $\tau$ -збіжності граничний перехід у співвідношенні

$$\rho_k(t, x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u_k(t, x)|^2} \right\} \quad \text{м.с. в } Q_T$$

приводить до нерівності (3.25) з  $\widehat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$ . Щодо включення  $\rho \in \mathfrak{R}_{ad}$ , то воно є прямим наслідком слабкої-\* компактності обмежених множин  $\mathfrak{R}_{ad}$  в  $BV(Q_T)$ .

Залишається показати, що граничний кортеж  $(\rho, v, u)$  задовольняє інтегральну тотожність (3.49). Для цього достатньо зафіксувати довільну тестову функцію  $\varphi \in \Psi$  і перейти до границі у співвідношенні

$$\int_0^T \int_\Omega (-\varphi_t u_k + \rho_k (\nabla u_k, \nabla \varphi)) \, dx dt = \int_0^T \int_\Omega v_k \varphi \, dx dt + \int_\Omega u_0(x) \varphi(0, x) \, dx. \quad (3.55)$$

Оскільки  $\rho_k \nabla u_k \rightarrow \rho \nabla u$  сильно в  $L^q(Q_T)$  для  $q \in [1, 2)$  за лемою 1.2.1, то граничний перехід в (3.55) приводить до інтегральної тотожності (3.49). Таким чином,  $(\rho, v, u)$  є допустимим розв'язком в задачі оптимального керування (3.41)–(3.46).  $\square$

Тепер ми можемо перейти до доведення існування оптимальних розв'язків в задачі (3.41)–(3.46).

**Теорема 3.3.1.** *Нехай  $u_d \in L^\infty(\Omega)$  є заданою функцією, і нехай  $\lambda$  та  $\gamma$  є фіксованими сталими. Тоді при кожному  $\varepsilon \in (0, 1)$  задача оптимального керування (3.41)–(3.46) має принаймні один розв'язок  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon$ .*

*Доведення.* Нехай  $\varepsilon \in (0, 1)$  є заданим. Тоді, як було підкреслено в зауваженні 3.3.1, задача оптимального керування (3.41)–(3.46) є змістовною, тобто  $\Xi_\varepsilon \neq \emptyset$ .

Нехай  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  є мінімізаційною послідовністю в задачі керування (3.41)–(3.46). Тоді з рівності

$$\begin{aligned} \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_k(T) - u_d|^2 dx + \right. \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx dt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\omega} |v_k|^2 dx dt \\ &\quad \left. + \int_{Q_T} |D\rho_k| + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right|^2 dx dt \right] < +\infty \end{aligned}$$

та означення множини  $\mathfrak{R}_{ad}$  випливає існування сталої  $C > 0$  такої, що

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\nabla u_k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)} &\leq C, \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} \leq C, \\ \text{і} \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} \|\rho_k\|_{BV(Q_T)} &\leq C. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Отже, залучаючи енергетичну рівність (3.51), отримуємо

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_k^2(t, x) dx dt &\leq 2T \int_0^T \int_{\omega} v_k u_k dx dt + T \int_{\Omega} u_0^2 dx \\ &\leq 2T^2 \int_0^T \int_{\omega} v_k^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u_k^2 dx dt + T \int_{\Omega} u_0^2 dx \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq 4T^2 C^2 + 2T \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Використовуючи цей факт разом із (3.56), бачимо, що послідовність  $\{(\rho_k, v_k, u_k) \in \Xi_\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою у сенсі означення 3.3.1. А це значить, що існують функції  $\rho_\varepsilon^0 \in BV(Q_T)$ ,  $v_\varepsilon^0 \in L^2(0, T; L^2(\omega))$  і  $u_\varepsilon^0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  такі, що з точністю до підпослідовності  $(\rho_k, v_k, u_k) \xrightarrow{\tau} (\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Оскільки множина  $\Xi_\varepsilon$  є секвенційно замкнутою відносно  $\tau$ -збіжності (див. твердження 3.3.1), то звідси випливає, що  $\tau$ -граничний кортеж функцій  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$  є допустимим розв'язком в задачі оптимального керування (3.41)–(3.46) (тобто  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon$ ). На завершення доведення зауважимо, що  $\nabla u_k(t, x) \rightarrow \nabla u_\varepsilon^0(t, x)$  м.в. в  $Q_T$  (див. зауваження 3.3.2), а отже,

$$\rho_k(t, x) - \frac{1}{1 + |\nabla u_k(t, x)|^2} \rightarrow \rho_\varepsilon^0(t, x) - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0(t, x)|^2} \text{ м.с. в } Q_T.$$

Оскільки

$$\left\| \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right\|_{L^\infty(Q_T)} \leq 2 \text{ для всіх } k \in \mathbb{N},$$

то послідовність  $\left\{ \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  є екві-інтегрованою. Отже, за теоремою Vitaly маємо

$$\rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \rightarrow \rho_\varepsilon^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2} \text{ сильно в } L^2(Q_T) \quad (3.57)$$

(див. лему 1.2.1). Беручи цей факт до уваги а також співвідношення

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega \left| \rho_k - \frac{1}{1 + |\nabla u_k|^2} \right|^2 dx dt &\stackrel{\text{за (3.57)}}{=} \int_0^T \int_\Omega \left| \rho_\varepsilon^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2} \right|^2 dx dt, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega |u_k(T) - u_d|^2 dx &\stackrel{\text{див. зауваження (3.3.3)}}{\geq} \int_\Omega |u_\varepsilon^0(T) - u_d|^2 dx, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx dt &\stackrel{\text{за (3.52)}}{=} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^0|^2 dx dt, \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\omega |v_k|^2 dx dt &\stackrel{\text{за (3.53)}}{\geq} \int_0^T \int_\Omega |v_\varepsilon^0|^2 dx dt, \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} |D\rho_k| &\stackrel{\text{за (3.54)}}{\geq} \int_{Q_T} |D\rho_\varepsilon^0|, \end{aligned}$$

бачимо, що функціонал вартості  $J_\varepsilon$  є секвенційно  $\tau$ -напівнеперервним знизу. Таким чином,

$$J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J_\varepsilon(\rho_k, v_k, u_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J_\varepsilon(\rho_k, v_k, u_k) = \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u),$$

а отже,  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$  є оптимальним розв'язком.  $\square$

### 3.4. Асимптотичний аналіз регуляризованих задач оптимального керуванням $(\mathcal{R}_\varepsilon)$

Основною метою цього розділу є показати, що вихідна задача оптимального керування  $(\mathcal{R})$  має непорожню множину розв'язків, а деякі з них бути досягнуті (у відповідній топології) оптимальними розв'язками апроксимаційних задач  $(\mathcal{R}_\varepsilon)$ . Для цього скористаємося концепцією варіаційної збіжності задач умовної мінімізації (див. [28, 51, 52]) та вивчимо асимптотичну поведінку сімейства задач  $(\mathcal{R}_\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Розпочнемо з наступної концепції.

**Означення 3.4.1.** Нехай  $\{(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \subset BV(Q_T) \times L^2(0, T; L^2(\omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$  є довільною послідовністю. Будемо казати, що ця послідовність є обмеженою, якщо

$$\sup_{\varepsilon>0} [\|\rho_\varepsilon\|_{BV(Q_T)} + \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}] < +\infty.$$

**Означення 3.4.2.** Обмежену послідовність

$$\{(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \subset BV(Q_T) \times L^2(0, T; L^2(\omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

називатимемо  $w$ -збіжною при  $\varepsilon \rightarrow 0$  і писатимемо  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \xrightarrow{w} (\rho, v, u)$ , якщо  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \xrightarrow{\tau} (\rho, v, u)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тобто

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ слабо в } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.58)$$

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(\omega)), \quad (3.59)$$

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ слабо-* в } BV(Q_T) \text{ та м.с. в } Q_T; \quad (3.60)$$

і при цьому  $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$  сильно в  $L^1(0, T; L^1(\Omega)^N)$ .

Встановимо наступний технічний результат.

**Лема 3.4.1.** Нехай  $\{(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є довільною  $\tau$ -збіжною послідовністю допустимих розв'язків для задач оптимального керування (3.41)–(3.46), і нехай  $(\rho, v, u) \in BV(Q_T) \times L^2(0, T; L^2(\omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$  є її  $\tau$ -границею. Тоді  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \xrightarrow{w} (\rho, v, u)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , де кортеж  $(\rho, v, u)$  задовольняє обмеження

$$\rho \in \mathfrak{R}_{ad}, \quad v \in \mathfrak{V}_{ad}, \quad u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.61)$$

$$\rho(t, x) \geq \frac{1}{1 + |\nabla u(t, x)|^2} \text{ м.с. в } Q_T, \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (-\varphi_t u + \rho(\nabla u, \nabla \varphi)) \, dxdt = \\ & = \int_0^T \int_\omega v \varphi \, dxdt + \int_\Omega u_0(x) \varphi(0, x) \, dx, \quad \forall \varphi \in \Psi. \end{aligned} \quad (3.63)$$

*Доведення.* Оскільки  $\{(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є послідовністю допустимих розв'язків, то при кожному  $\varepsilon > 0$  мають місце рівності

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (-\varphi_t u_\varepsilon + \rho_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi)) \, dx dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega v_\varepsilon \varphi \, dx dt + \int_\Omega u_0(x) \varphi(0, x) \, dx, \quad \forall \varphi \in \Psi. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Переходячи в (3.64) до границі, отримуємо (3.63). Поклавши в цьому співвідношенні в якості тестової функції  $\varphi$  елемент простору  $C_c^\infty(Q_T) \subset \Psi$ , бачимо, що  $\tau$ -границя  $(\rho, v, u)$  задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla u) = \chi_\omega v$$

в сенсі розподілень  $\mathcal{D}'(Q_T)$ . Отже, як зазначалося в зауваженні 3.3.3, можемо вважати, що для кожного  $\varepsilon > 0$  виконуються рівності

$$\frac{\partial (u_\varepsilon - u)}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon - \rho \nabla u) = (v_\varepsilon - v) \chi_\omega \quad \text{в } \mathcal{D}'(Q_T). \quad (3.65)$$

Залучаючи далі аргументи з доведення теореми 3.2.1, ми оберемо в якості тестової функції для (3.65) функцію  $T_K(u_\varepsilon - u) \phi_A$ , де  $A$  — компактна підмножина  $Q_T$ , а  $\phi_A \in C_0^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$  є таким, що  $0 \leq \phi_A(t, x) \leq 1$  в  $Q_T$  і  $\phi_A(t, x) = 1$  на  $A$ . Після інтегрування за частинами отримуємо

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \phi_A \rho_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon - \nabla u, \nabla T_K(u_\varepsilon - u)) \, dx dt = \iint_{Q_T} \frac{\partial \phi_A}{\partial t} S_K(u_\varepsilon - u) \, dx dt - \\ - \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_\varepsilon - \rho) (\nabla u, \nabla T_K(u_\varepsilon - u)) \, dx dt - \\ - \iint_{Q_T} \phi_A \rho (\nabla u_\varepsilon - \nabla u, \nabla T_K(u_\varepsilon - u)) \, dx dt - \\ - \iint_{Q_T} \phi_A (\rho_\varepsilon - \rho) (\nabla u_\varepsilon, \nabla T_K(u_\varepsilon - u)) \, dx dt + \\ + \int_0^T \langle (v_\varepsilon - v) \chi_\omega, [T_K(u_\varepsilon - u)] \phi_A \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \, dt. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Оскільки за твердженням 3.2.1,

$T_K(u_\varepsilon - u) \rightharpoonup 0$  слабо в  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ , сильно в  $L_{loc}^2(Q_T)$  та м.с. в  $Q_T$ ,

$$S_K(u_\varepsilon - u) \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } L_{loc}^2(Q_T),$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то з (3.58)–(3.60) та теореми Лебега випливає, що права частина в (3.66) прямує до нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отже переходячи до границі в (3.66), знаходимо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \phi_A \rho_\varepsilon (\nabla u_\varepsilon - \nabla u, \nabla T_K(u_\varepsilon - u)) \, dxdt = 0. \quad (3.67)$$

Взявши

$$E_\varepsilon := \phi_A \rho_\varepsilon |\nabla(u_\varepsilon - u)|^2 \quad \text{in } Q_T$$

та розбивши множину  $A$  на підмножини

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &= \{(t, x) \in A : |u_\varepsilon(t, x) - u(t, x)| \leq K\}, \\ G_\varepsilon &= \{(t, x) \in A : |u_\varepsilon(t, x) - u(t, x)| > K\}, \end{aligned}$$

бачимо, що

$$\iint_A E_\varepsilon^\theta \, dxdt \leq \left( \iint_{B_\varepsilon} E_\varepsilon \, dxdt \right)^\theta |B_\varepsilon|^{1-\theta} + \left( \iint_{G_\varepsilon} E_\varepsilon \, dxdt \right)^\theta |G_\varepsilon|^{1-\theta}$$

за нерівністю Hölder'а, де  $\theta \in (0, 1)$ . Оскільки для фіксованого  $K$  маємо  $|G_\varepsilon| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а послідовність  $\{\rho_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u)\}_{\varepsilon > 0}$  є обмеженою в  $L^2(0, T; L^2(\Omega)^N)$ , то  $\sup_{\varepsilon > 0} \|E_\varepsilon\|_{L^1(Q_T)} < \infty$ , а отже

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \iint_{G_\varepsilon} E_\varepsilon \, dxdt \right)^\theta |G_\varepsilon|^{1-\theta} = 0.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_A E_\varepsilon^\theta \, dxdt \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \left( \iint_{B_\varepsilon} E_\varepsilon \, dxdt \right)^\theta |B_\varepsilon|^{1-\theta} \right] \\ &= \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \phi_A \rho (\nabla(u_\varepsilon - u), \nabla T_K(u_\varepsilon - u)) \, dxdt \right)^\theta \times \\ &\quad \times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |B_\varepsilon|^{1-\theta} \stackrel{\text{by (3.39)}}{=} 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

В результаті з (3.68) випливає, що  $E_\varepsilon^\theta \rightarrow 0$  сильно в  $L^1(A)$ . Отже, залучаючи довільну послідовність компактних множин  $A \subset Q_T$ , що збігаються у

відповідному сенсі до  $Q_T$ , бачимо, що вона містить підпослідовність  $\{E_\varepsilon\}_{\varepsilon.0}$  (яку будемо позначати тим самим індексом) таку, що

$$E_\varepsilon(t, x) \rightarrow 0$$

для майже всіх  $(t, x) \in Q_T$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Отже,

$$\rho_\varepsilon(t, x) |\nabla u_\varepsilon(t, x) - \nabla u(t, x)|^2 \rightarrow 0$$

для майже всіх  $(t, x) \in Q_T$  при  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . (3.69)

Використовуючи той факт, що  $(\rho_\varepsilon, v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$  для кожного  $\varepsilon > 0$  і при цьому  $\frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , бачимо, що

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(t, x) &\geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(t, x)|^2} \right\} \geq \\ &\geq \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(t, x)|^2} \text{ м.с. в } Q_T \end{aligned} \quad (3.70)$$

при достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Тоді з (3.70) та (3.68), знаходимо:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 dx dt \leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega)^N)}^2 &= \left( \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon - \nabla u| dx dt \right)^2 \leq \\ &\leq \left( \int_0^T \left( \int_\Omega \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \int_\Omega (1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2) dx \right)^{1/2} dt \right)^2 \leq \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 dx dt \int_0^T \int_\Omega (1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2) dx dt \leq \\ &\leq \left( |Q_T| + \sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \right) \int_\Omega \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(x)|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

то з (3.71) випливає, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon - \nabla u\|_{L^1(0,T;L^1(\Omega)^N)}^2 \leq$$



$$\leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{Q_T} \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon|^2} |\nabla u_\varepsilon - \nabla u|^2 dx dt = 0. \quad (3.72)$$

Таким чином, ми можемо уточнити властивості  $\tau$ -збіжності (3.58)–(3.60) таким чином: на додаток до (3.58), маємо

$$\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u \text{ сильно в } L^1(0, T; L^1(\Omega)^N)$$

та існує підпослідовність  $\{\varepsilon'\}$  така, що

$$\nabla u_{\varepsilon'}(t, x) \rightarrow \nabla u(t, x) \quad \text{м.с. в } Q_T. \quad (3.73)$$

На завершення доведення залишається показати, що

$$\rho(t, x) \geq \frac{1}{1 + |\nabla u(t, x)|^2} \quad \text{м.с. в } Q_T. \quad (3.74)$$

Для цього досить зауважити, що

$$\rho_\varepsilon(t, x) \geq \max \left\{ \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(t, x)|^2} \right\} \geq \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon(t, x)|^2} \quad \text{м.с. в } Q_T \quad (3.75)$$

при достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Тоді залучаючи поточкові збіжності (3.73) та (3.60) і переходячи до границі в (3.75) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , приходимо до анонсованої властивості (3.62).  $\square$

Нашим наступним кроком є обговорення питання, пов'язаного з існуванням розв'язків вихідної задачі оптимального керування (3.9)–(3.13) та їх досяжністю оптимальними розв'язками апроксимаційних задач  $(\mathcal{R}_\varepsilon)$ . Перш ніж продовжити, припустимо, що множина допустимих розв'язків  $\Xi$  задачі (3.9)–(3.13) непорожня. У випадку, коли початковий стан  $u_0$  достатньо гладкий і  $\text{supp}(u_0) \subset \omega$ , це припущення можна легко перевірити. Дійсно, нехай  $\varphi \in C^\infty([0, T]; C_c^\infty(\omega))$  — довільна функція, така що  $\varphi(0, x) = u_0(x)$  у  $\Omega$ . Тоді легко бачити, що пара

$$(v, u) := \left( \left[ \varphi_t - \text{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{1 + |\nabla \varphi|^2} \right) \right]_{x \in \omega}, \varphi \right)$$

належить множині  $\Xi$ , а отже  $\Xi \neq \emptyset$ .

Розпочнемо з наступного результату, який можна розглядати як прямий наслідок леми 3.4.1 та теореми 3.3.1.

**Твердження 3.4.1.** Нехай  $u_d \in L^\infty(\Omega)$  є заданою функцією, і нехай  $\lambda$  та  $\gamma$  є певними сталими. Нехай також  $\{(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є обмеженою послідовністю оптимальних розв'язків для апроксимаційних задач (3.41)–(3.46) коли малий параметр  $\varepsilon$  прямує до нуля в межах строго спадної послідовності додатних чисел. Тоді знайдеться підпослідовність послідовності  $\{(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ , яку знову позначатимемо індексом  $\varepsilon$ , та розподілення  $\rho^0 \in \mathfrak{R}_{ad} \subset BV(Q_T)$ ,  $v^0 \in \mathfrak{V}_{ad}$  і  $u^0 \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  такі, що вони задовольняють умови (3.62)–(3.63) і при цьому  $(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \xrightarrow{w} (\rho^0, v^0, u^0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ключовим моментом у твердженні 3.4.1 є припущення, що обрана послідовність оптимальних розв'язків апроксимаційних задач (3.41)–(3.46) є обмеженою. Покажемо, що це припущення можна опустити, якщо вихідна задача оптимального керування є змістовною, тобто  $\Xi \neq \emptyset$ .

**Твердження 3.4.2.** Припустимо, що  $\Xi \neq \emptyset$ . Нехай  $\{(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  є послідовністю оптимальних розв'язків апроксимаційних задач (3.41)–(3.46). Тоді знайдеться стала  $C > 0$ , що не залежить від  $\varepsilon > 0$ , і така, що

$$\sup_{\varepsilon>0} [\|\rho_\varepsilon^0\|_{BV(Q_T)} + \|v_\varepsilon^0\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} + \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}] \leq C. \quad (3.76)$$

*Доведення.* Нехай  $(\hat{v}, \hat{u}) \in \Xi$  є довільним допустимим розв'язком вихідної задачі оптимального керування (3.9)–(3.13). Тоді ця пара задовольняє умови (3.14)–(3.15). Поклавши  $\hat{\rho} := (1 + |\nabla \hat{u}|^2)^{-1}$  в  $Q_T$ , бачимо, що

$$0 \leq \hat{\rho}(t, x) \leq 1 \text{ м.с. в } Q_T \quad \text{і} \quad \hat{\rho} \in BV(Q_T) \cap L^\infty(Q_T),$$

а також, що пара  $(\hat{\rho}, \hat{u})$  задовольняє нерівностям (3.48) при достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Отже,  $\hat{\rho} \in \mathfrak{R}_{ad}$  і як наслідок, маємо:  $(\hat{\rho}, \hat{v}, \hat{u}) \in \Xi_\varepsilon$  при достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Тому,

$$\begin{aligned} \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) &= J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \leq J_\varepsilon(\hat{\rho}, \hat{v}, \hat{u}) \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\hat{u}(T) - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla \hat{u}|^2 dx dt \end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\omega} |\widehat{v}|^2 dxdt + \int_{Q_T} |D\widehat{\rho}| = C < +\infty.$$

З цього співвідношення та з означення множини  $\mathfrak{R}_{ad}$  випливає, що

$$\|\nabla u_{\varepsilon}^0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^N)}^2 \leq \frac{2}{\lambda} C, \quad \|v_{\varepsilon}^0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{2}{\gamma} C, \quad (3.77)$$

$$\int_{Q_T} |D\rho_{\varepsilon}^0| \leq C, \quad \|\rho_{\varepsilon}^0\|_{BV(\Omega)} \leq |Q_T| + C, \quad (3.78)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left| \rho_{\varepsilon}^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_{\varepsilon}^0|^2} \right|^2 dxdt \leq C\varepsilon \quad (3.79)$$

для всіх достатньо малих  $\varepsilon > 0$ . Тоді залучаючи енергетичну рівність (3.51), бачимо, що

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} [u_{\varepsilon}^0]^2 dxdt &\leq 2T \int_0^T \int_{\omega} v_{\varepsilon}^0 u_{\varepsilon}^0 dxdt + T \int_{\Omega} u_0^2 dx \leq \\ &\leq 2T^2 \int_0^T \int_{\omega} [v_{\varepsilon}^0]^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} [u_{\varepsilon}^0]^2 dxdt + T \int_{\Omega} u_0^2 dx. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sup_{\varepsilon>0} \|u_{\varepsilon}^0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq 8T^2 \frac{C}{\gamma} + 2T \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.80)$$

Тим самим показано, що послідовність  $\{(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0, u_{\varepsilon}^0) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$  є обмеженою в  $BV(Q_T) \times L^2(0, T; L^2(\omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .  $\square$

Наступним кроком нашого аналізу є показати, що пара  $(v^0, u^0)$  є оптимальною для вихідної задачі оптимального керування  $(\mathcal{R})$  за умови, що  $(\rho^0, v^0, u^0)$  є кластерним кортежем для обраної послідовності оптимальних розв'язків  $\{(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0, u_{\varepsilon}^0) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ . Для цього скористаємося деякими результатами з недавніх публікацій [26, 45], де запропоновано так званий непрямий підхід до проблеми існування оптимальних розв'язків.

**Теорема 3.4.1.** *Припустимо, що  $\Xi \neq \emptyset$ . Нехай  $\{(\rho_{\varepsilon}^0, v_{\varepsilon}^0, u_{\varepsilon}^0) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$  є послідовністю оптимальних розв'язків для апроксимаційних задач (3.41)–(3.46). Нехай  $(\rho^0, v^0, u^0) \in BV(Q_T) \times L^2(0, T; L^2(\omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$  є  $w$ -кластерним кортежем (в сенсі означення 3.4.2) означеної послідовності*

розв'язків. Тоді

$$(v^0, u^0) \in \Xi, \quad \rho^0(t, x) = \frac{1}{1 + |\nabla u^0(t, x)|^2} \text{ м.с. в } Q_T, \quad (3.81)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) = J(v^0, u^0) = \inf_{(v, u) \in \Xi} J(v, u). \quad (3.82)$$

*Доведення.* За аналогією з доведенням твердження 3.4.2, можна показати, що існує стала  $C > 0$  така, що є вірними оцінки (3.77)–(3.80). Отже, послідовність  $\{(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  є компактною відносно  $\tau$ -збіжності. Крім того, з огляду на твердження 3.4.1 та теорему Лебега, можемо припустити, що з точністю до підпослідовності,

$$\begin{aligned} (\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) &\xrightarrow{w} (\rho^0, v^0, u^0) \quad \text{і} \\ \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2} &\rightarrow \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \quad \text{сильно в } L^2(Q_T) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\rho_\varepsilon^0(t, x) - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0(t, x)|^2} \rightarrow \rho^0(t, x) - \frac{1}{1 + |\nabla u^0(t, x)|^2} \text{ м.с. в } Q_T, \quad (3.84)$$

і при цьому  $(\rho_\varepsilon^0 - (1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2)^{-1}) \in L^\infty(\Omega)$ .

Тоді з теореми Vitaly (див. лему 1.2.1) отримуємо

$$\rho_\varepsilon^0 - (1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2)^{-1} \rightarrow \rho^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \text{ сильно в } L^2(\Omega).$$

Проте, як випливає з оцінки в (3.79),  $L^2$ -границя послідовності функцій  $\left\{\rho_\varepsilon^0 - \frac{1}{1 + |\nabla u_\varepsilon^0|^2}\right\}_{\varepsilon > 0}$  дорівнює нулю, Отже

$$\rho^0(t, x) = \frac{1}{1 + |\nabla u^0(t, x)|^2} \text{ м.с. в } Q_T.$$

Таким чином,

$$(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \xrightarrow{w} \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2}, v^0, u^0 \right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Беручи до уваги твердження 3.4.1, бачимо, що  $(v^0, u^0)$  є допустимим розв'язком вихідної задачі  $(\mathcal{R})$ . Окрім цього, як прямий наслідок властивостей (3.83), маємо таку оцінку

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^0(T) - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dxdt + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |v^0|^2 dxdt + \int_{Q_T} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \right) \right| = J(v^0, u^0). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Припустимо, що  $(v^0, u^0)$  не є насправді оптимальною для задачі  $(\mathcal{R})$ . Тоді знайдеться інша пара  $(v^*, u^*) \in \Xi$  така, що

$$J(v^*, u^*) < J(v^0, u^0) < +\infty. \quad (3.86)$$

Візьмемо  $\rho^* = (1 + |\nabla u^*|^2)^{-1}$ . Тоді з умови  $(v^*, u^*) \in \Xi$  випливає, що кортеж  $(\rho^*, v^*, u^*)$  є допустимим розв'язком для кожної апроксимаційної задачі  $(\mathcal{R}_\varepsilon)$ , тобто

$$(\rho^*, v^*, u^*) \in \Xi_\varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1). \quad (3.87)$$

Беручи до уваги цей факт, отримуємо

$$\begin{aligned} J(v^0, u^0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^0(T) - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dxdt + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |v^0|^2 dxdt + \int_{Q_T} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^0|^2} \right) \right| \\ &\stackrel{(3.85)}{\leq} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho_\varepsilon^0, v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(\rho, v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(\rho, v, u) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(\rho^*, v^*, u^*) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^*(T) - u_d|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u^*|^2 dxdt + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |v^*|^2 dxdt + \int_{Q_T} \left| D \left( \frac{1}{1 + |\nabla u^*|^2} \right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} \left| \rho^* - \frac{1}{1 + |\nabla u^*|^2} \right|^2 dxdt = J(v^*, u^*). \end{aligned}$$

Таким чином,  $J(v^0, u^0) \leq J(v^*, u^*)$  і ми приходимо до суперечності з припущенням (3.86). Отже гранична пара  $(v^0, u^0)$  є оптимальною для вихідної задачі керування  $(\mathcal{R})$ .  $\square$

### Висновки до розділу 3

Даний розділ присвячено задачі оптимального керування для еволюційного рівняння Перона-Маліка з крайовими умовами Неймана на межі області,

яке набуває вигляду нелінійного параболічного рівняння з немонотонним та некоерцитивним дивергентним членом. Основними результатами цього розділу є:

1. Запропоновано загальний підхід до апроксимації такої задачі оптимального керування параметризованими задачами з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного еліптичного оператора.
2. Показано, що кожна з апроксимаційних задач є коректно поставленою, має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, що утворена такими розв'язками, є компактною у спеціальній топології.
3. Залучаючи непрямий підхід, отримано достатні умови розв'язаності вихідної задачі оптимального керування. А саме показано, що будь-яка кластерна точка послідовності оптимальних розв'язків апроксимаційних задач є оптимальною парою для вихідної задачі.

## РОЗДІЛ 4

### Задача оптимального $L^1$ -керування для відновлення зашумлених зображень

В даному розділі пропонується нове формулювання задачі відновлення зображень, які спотворені аддитивним шумом, у вигляді задачі оптимального керування для квазілінійного параболічного рівняння з нелокальним  $p[u]$ -лапласіаном та керуванням з класу  $L^1$ . Характерною особливістю запропонованої постановки є те, що змінний порядок нелінійності  $p(t, x)$  і тензор анізотропної дифузії  $D(t, x)$  в дивергентному операторі параболічного рівняння не є заздалегідь чітко визначеними, а натомість ці характеристики нелокально залежать від розв'язку початково-крайової задачі для означеного параболічного рівняння, тобто  $p_u = p(t, x, u)$  і  $D_u = D(t, x, u)$ . Основні результати даного розділу опубліковано в роботах [5, 6] та анонсовано в матеріалах конференції [8].

#### 4.1. Вступ та практична мотивація

Основною метою в задачах обезшумлення цифрових зображень є відтворення оригінального зображення  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  за його зашумленим образом  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Оскільки шум, контурність та текстура є високочастотними компонентами, то зазвичай їх важко розрізнити в процесі шумоподавлення, і, як наслідок, зашумлені зображення можуть неминуче втратити деякі деталі. Ця проблема стає набагато складнішою, якщо вихідне зображення забруднене імпульсним шумом. Зважаючи на це, в цьому розділі будемо в основному зосереджуватися на тих підходах, де проблему шумозаглушення можна сформулювати у формі деякої задачі оптимального керування зі спеціальним класом керувань, що моделює присутність як білого гаусового адитивного шуму  $n$ , так і шуму  $v$  із сильною імпульсною природою, яку модель Гауса не описує (див., наприклад, [2, 13, 65]). У цьому випадку зашумлене зображення можна представити у вигляді  $f = u + v + n$ , і питання

полягає в тому, як відокремити справжнє зображення  $u$ , усунувши від  $f$  гаусівський шум  $n$  та імпульсну складову  $v$ .

З метою відновлення оригінального зображення  $u$  будемо припускати, що обидва типи шумів можуть виникати одночасно і незалежно один від одного у всій області. В результаті пропонується шукати оригінальне зображення як розв'язок наступної задачі оптимального керування

$$(\mathcal{R}) \quad \text{Мінімізувати } J(v, u) = \|v\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(T) - f_0|^2 dx \quad (4.1)$$

за наявності таких обмежень

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \left( |D_u(t, x) \nabla u|^{p_u(t, x)-2} D_u(t, x) \nabla u \right) = \kappa (f - u - v) \quad (4.2)$$

$$\text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega,$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.3)$$

$$u(0, \cdot) = f_0(\cdot) \quad \text{в } \Omega, \quad (4.4)$$

$$v_a(x) \leq v(t, x) \leq v_b(x), \quad \text{м.с. в } Q_T. \quad (4.5)$$

Тут  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  є обмеженою відкритою множиною з достатньо регулярною межею  $\partial\Omega$ ,  $T > 0$  та  $\kappa \in \mathbb{R}$  — задані значення,  $f \in L^2(\Omega)$  є вихідним зашумленим зображенням,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  попередньо очищене зображення через залучення стандартного медіанного фільтру до  $f$ ,  $v_a, v_b \in L^2(\Omega)$ ,  $v_a(x) \leq v_b(x)$  м.с. в  $\Omega$ , — задані розподілення,

$$\|v\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}^2 = \int_0^T \left( \int_{\Omega} |v| dx \right)^2 dx \quad (4.6)$$

норма в просторі  $L^2(0, T; L^1(\Omega))$ ,  $D_u = D(t, x, u)$  — матриця анізотропної дифузії, а змінний порядок (експонента)  $p_u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  означений за правилом

$$p_u(t, x) := 1 + g \left( \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}(\tau, \cdot))(x)| d\tau \right), \quad \forall (t, x) \in Q_T, \quad (4.7)$$

де

$$g(s) = \delta + \frac{a^2(1 - \delta)}{a^2 + s^2}, \quad \forall s \in [0, +\infty), \quad (4.8)$$



$$G_\sigma(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0, \quad (4.9)$$

$$(G_\sigma * \tilde{u}(t, \cdot))(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x-y) \tilde{u}(t, y) dy, \quad (4.10)$$

через  $\tilde{u}$  позначено подовження функції  $u$  нульовими значеннями поза множиною  $Q_T$  до усього простору  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , і насамкінець  $h > 0$  та  $0 < \delta \ll 1$  є заданими малими додатніми величинами. Що стосується параметрів  $\delta > 0$  і  $a > 0$ , то вони діють як регуляризуючі та згладжуючі величини.

Ясно, що для кожної функції  $u \in L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega))$ , виконується включення  $p_u(t, x) \in [p^-, p^+] \subset (1, 2]$  майже скрізь в  $Q_T$  з  $p^- = 1 + \delta$  та  $p^+ = 2$ .

Дослідження задач оптимального керування для рівнянь в частинних похідних зі змінним порядком нелінійності мотивується різноманітними застосуваннями в задачах обробки зображень, де частинні випадки задачі (4.1)–(4.5) виникають природним чином [2, 3, 14, 22]. Зокрема, в роботі [4], автори розглядають окремий випадок моделі (4.1)–(4.5) і показують, що заданий клас задач оптимального керування має непорожню множину розв'язків.

Упродовж останніх років було запропоновано багато різних підходів та моделей для реконструкції цифрових зображень, які пошкоджені аддитивним шумом. Зокрема, в [37] була запропонована наступна модель нелінійної гібридної дифузії, що є сімбізом дифузії з оператором середньої кривини та дифузії тепла за моделлю Гауса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{(|\nabla u|^2 + 1)^{(2-p(|\nabla u|^2))/2}} \right), \quad \text{в } (0, T) \times \Omega, \quad (4.11)$$

$$u(0, x) = f, \quad \text{в } \Omega, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.13)$$

в якій

$$p(|\nabla u|^2) = 1 + \frac{1}{1 + k|\nabla u|^2}, \quad (4.14)$$

$f$  є вихідним зображенням,  $k > 0$  та  $T > 0$  заданими сталими,  $\Omega$  є обмеженою відкритою підмножиною  $\mathbb{R}^2$  з достатньо регулярною межею, а  $\nu$  є

зовнішньою одиничною нормаллю до межі  $\partial\Omega$ .

Важливою характеристикою цієї моделі є той факт, що вона має гібридний тип дифузії, який поєднує дифузію середньої кривини з дифузією тепла таким чином, що всередині тих областей, де градієнт  $u$  досить малий, нова модель діє як рівняння теплопереносу та призводить до ізотропного згладжування, тоді як поблизу контурів області, де величина градієнта велика, ця модель діє як рівняння середньої кривини. Хоча автори [37] стверджують, що ця модель узагальнює відомі на сьогоднішній день моделі (зокрема, модель Перона-Маліка [71] та моделі з  $p(x)$ -оператором Лапласа, які запропоновано в [22]), насправді це далеко не так, оскільки жодна зі згаданих моделей не може бути отримана як окремий випадок (4.11)–(4.13).

Варто зауважити, що через змінний характер показника  $p$  маємо певну неузгодженість між умовами монотонності та коерцитивності. Через це задачу (4.1)–(4.4) можна визначити як задачу оптимального керування для квазілінійних параболічних рівнянь із нестандартними умовами зростання, і її можна характеризувати як узагальнення еволюційної версії  $p(t, x)$ -рівняння Лапласа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left( |\nabla u|^{p(t,x)-2} \nabla u \right) \quad (4.15)$$

що залежить лише від  $t$  та  $x$ . Рівняння (4.15) інтенсивно вивчалось багатьма авторами і існує обширна літератури, яка присвячена цьому рівнянню. Ми обмежимося посиланням лише на такі джерела [8, 9, 17, 70, 74, 83], де дається достатньо повний огляд останніх результатів в теорії еволюційних рівнянь з  $p(t, x)$ -Лаплас операторами.

Однак, наскільки нам відомо, наведені вище результати щодо розв'язності параболічних рівнянь типу (4.2) в основному стосуються рівнянь зі змінним показником, що залежить лише від  $(t, x)$ , тоді як початково-крайовій задачі (4.2) з матрицею анізотропності  $D_u(t, x)$  і показником нелінійності  $p_u(t, x)$ , який визначено за правилом (4.7), було не приділено достатньої уваги. Крім того, на відміну від більшості існуючих результатів, у цій задачі ми не визначаємо експоненту  $p$  апіорі. Натомість ми пов'язуємо

цю характеристику з окремим рішенням задачі (4.2)–(4.5). Отже, на поведінку показника  $p$  і тензора  $D$  можуть впливати значення невідомого розв’язку  $u$ . Також варто підкреслити, що залежність  $p_u$  і  $D_u$  від  $u$  не є локальною, тоді як це є ключовим припущенням у більшості існуючих публікацій (див., наприклад, [11]). Насправді всі слабкі розв’язки цієї задачі належать відповідному ‘персональному’ функціональному простору, і, зважаючи на відповідні припущення щодо структури  $D_u(t, x)$  і  $p_u(t, x)$ , задача (4.2)–(4.5) може допускати слабкі рішення, які можуть не мати стандартних властивостей, які властиві розв’язкам параболічних рівнянь. Зокрема, невідомо, чи є слабкий розв’язок єдиним і чи задовольняє він стандартну енергетичну рівність.

Незважаючи на те, що в літературі було запропоновано ряд різноманітних підходів до регуляризації задачі оптимального керування, яка пов’язана з виродженими еліптичними рівняннями (див., наприклад, [53, 54, 73]), питання про розв’язанність запропонованої задачі оптимального керування залишається відкритою проблемою на сьогодні.

З огляду на це, основною метою даного розділу є вивчення проблем розв’язанності для задачі оптимального керування (4.1)–(4.5). Зокрема, тут можна підкреслити кілька характерних особливостей запропонованої моделі. Перша полягає в тому, що тензор анізотропії  $D$  і показник степеня  $p$  залежать не тільки від  $(t, x)$ , а й від  $u(t, x)$ . Друга особливість полягає в тому, що задача оптимального керування формулюється з  $L^1(\Omega; L^2(0, T))$  керуваннями разом з додатковими поточковими обмеженнями. В результаті оптимальне керування може мати просторову розрідженість, тобто його носій є постійним у часі, тоді як керування  $u$  може дорівнювати тотожному нулю на деяких ділянках області  $\Omega$ .

Усе це приводить до наступного висновку: задача оптимального керування (4.1)–(4.5) є досить складною, і питання щодо її розв’язанності та змістовності є відкритими. Фактично, у наступних параграфах буде показано, що через змінний характер показника  $p$  і його залежність від  $t$  і  $x$  ми можемо втратити неперервність відображення  $t \mapsto \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ . Отже,

функціонал вартості (4.1), в загальному випадку, не є чітко визначеним, і, як наслідок, ми не можемо стверджувати, що задача керування (4.1)–(4.5) є розв’язанною. В зв’язку з цим постановка вихідної задачі оптимального керування потребує певної релаксації.

## 4.2. Попередні результати

Нехай  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — обмежена зв’язна відкрита множина з достатньо гладкою межею  $\partial\Omega$ , а  $T > 0$  — задане значення. Припустимо, що зовнішня одинична нормаль  $\nu = \nu(x)$  до межі  $\partial\Omega$  є визначеною для майже всіх точок  $x \in \partial\Omega$  відносно 1-вимірної міри Хаусдорфа  $\mathcal{H}^1$ . Покладемо  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ . Для будь-якої вимірної підмножини  $D \subset \Omega$  позначимо через  $|D|$  її 2-вимірну міру Лебега  $\mathcal{L}^2(D)$ . Позначимо замикання цієї множини як  $\overline{D}$ , а її межу через  $\partial D$ .

Для векторів  $\xi \in \mathbb{R}^2$  та  $\eta \in \mathbb{R}^2$  через  $(\xi, \eta) = \xi^t \eta$  позначимо стандартний скалярний добуток у  $\mathbb{R}^2$ , де  $^t$  означає оператор транспонування. Через  $|\xi|$  позначимо евклідову норму вектора  $\xi \in \mathbb{R}^2$ , тобто  $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ . Залучимо також таке позначення  $\text{diam } \Omega = \sup_{x, y \in \Omega} |x - y|$ .

### 4.2.1. Змінна експонента

Нехай  $u \in L^1(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  є заданою функцією. Пов’яжемо з  $u : Q_T \mapsto \mathbb{R}$  функцію (далі експоненту)  $p_u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ , яку означимо за правилом (4.7).

Оскільки  $G_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , то з (4.7) та з абсолютної неперервності інтеграла Лебега випливає, що  $1 < p_u(t, x) \leq 2$  в  $Q_T$  і  $p_u \in C^1([0, T]; C^\infty(\mathbb{R}^2))$ , навіть якщо  $u$  є просто абсолютно інтегрованою функцією в  $Q_T$ . Крім того, для кожного  $t \in [0, T]$ ,  $p_u(t, x) \approx 1$  в тих точках області  $\Omega$ , де функція  $u(t, \cdot)$  втрачає неперервність, і  $p_u(t, x) \approx 2$  там де  $u(t, x)$  є гладкою. З огляду на це експоненту  $p_u(t, x)$  можна інтерпретувати як характеристику текстури функції  $u$ .

Наступний результат відіграє важливу роль у подальшому аналізі

**Лема 4.2.1.** *Нехай  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  є послідовністю вимірних функцій, в якій кожен елемент вважається подовженим нулем поза межами області  $Q_T$  і при цьому*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} < +\infty, \quad (4.16)$$

*$u_k \rightarrow u$  слабо в  $L^1(0, T; L^1(\Omega))$  для деякого  $u \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$ .*

Нехай

$$\left\{ p_{u_k} = 1 + g \left( \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))| d\tau \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

*є відповідною послідовністю змінних експонент. Тоді знайдеться стала  $C > 0$  та величина  $\delta \in (0, 1)$ , що залежать лише від  $\Omega$ ,  $G$ ,  $g$ ,*

*$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}$ , і  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))}$  такі, що*

$$p^- := 1 + \delta \leq p_{u_k}(t, x) \leq p^+ := 2, \quad \forall (t, x) \in Q_T, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (4.17)$$

$$\{p_{u_k}(\cdot)\} \subset \mathfrak{S} = \left\{ q \in C^{0,1}(Q_T) \left| \begin{array}{l} |q(t, x) - q(s, y)| \leq C(|x - y| + |t - s|), \\ \forall (t, x), (s, y) \in \overline{Q_T}, \\ 1 < p^- \leq q(\cdot, \cdot) \leq p^+ \text{ в } \overline{Q_T}. \end{array} \right. \right\} \quad (4.18)$$

$$p_{u_k} \rightarrow p_u = 1 + g \left( \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}(\tau, \cdot))(\cdot)| d\tau \right) \quad (4.19)$$

*рівномірно в  $\overline{Q_T}$  при  $k \rightarrow \infty$ .*

*Доведення.* Оскільки послідовність  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в  $L^1(0, T; L^1(\Omega))$  а ядро фільтра Гауса  $G_\sigma$  є гладкою функцією, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \left| (\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(x) \right| d\tau &\leq \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \left( \int_\Omega |\nabla G_\sigma(x - y)| |\tilde{u}_k(\tau, y)| dy \right) d\tau \\ &\leq \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega - \Omega})} \frac{1}{h} \|u_k\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))}, \\ 2 &\geq p_{u_k}(t, x) = 1 + g \left( \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(x)| d\tau \right) \\ &\geq 1 + g \left( \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega - \Omega})} \frac{1}{h} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))} \right), \\ &\quad \forall (t, x) \in Q_T, \end{aligned}$$

де позначено

$$\begin{aligned} \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega-\Omega})} &= \max_{\substack{z=x-y \\ x \in \Omega, y \in \Omega}} \left[ |G_\sigma(z)| + |\nabla G_\sigma(z)| \right] = \\ &= \frac{e^{-1}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^2} \left[ 1 + \frac{1}{\sigma^2} \text{diam } \Omega \right]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Тоді з  $L^1$ -обмеженості послідовності  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  випливає існування додатньої величини  $\delta \in (0, 1)$  такої, що  $p_{u_k}(t, x) \geq 1 + \delta$ . Тим самим показано, що оцінка (4.17) справджується для всіх  $k \in \mathbb{N}$ .

Більше того, як випливає з (4.8) та співвідношень

$$\begin{aligned} &|p_{u_k}(t, x) - p_{u_k}(t, y)| \\ &\leq C_g \left| \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(x)| d\tau - \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(y)| d\tau \right| \\ &\leq C_g \int_0^T |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(x) - (\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(y)| d\tau \\ &\leq C_g \int_0^T \int_\Omega |u(\tau, z)| dz d\tau \max_{z \in \Omega} |\nabla G_\sigma(x - z) - \nabla G_\sigma(y - z)| \\ &= C_g \gamma_1 \max_{z \in \Omega} |\nabla G_\sigma(x - z) - \nabla G_\sigma(y - z)|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

де  $\gamma_1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))}$ , а також із гладкості функції  $\nabla G_\sigma(\cdot)$ , існує додатна стала  $C_G > 0$ , яка не залежить від  $k$  і така, що для кожного  $t \in [0, T]$ , справедлива оцінка

$$|p_{u_k}(t, x) - p_{u_k}(t, y)| \leq \gamma_1 C_g C_G |x - y|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Залучаючи подібні міркування, ми бачимо, що

$$\begin{aligned} &|p_{u_k}(t, y) - p_{u_k}(s, y)| \\ &\leq C_g \left| \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(y)| d\tau - \int_{s-h}^s |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(y)| d\tau \right| \\ &\leq C_g \left| \int_s^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(y)| d\tau - \int_{s-h}^{t-h} |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(y)| d\tau \right| \\ &\leq 2\gamma_1 \gamma_2 C_g \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega-\Omega})} |t - s|, \quad \forall t, s \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.22)$$

де  $\gamma_2 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}$ .

В результаті, беручи до уваги оцінки (4.21)–(4.22) та позначаючи

$$C := C_g \gamma_1 \left( 1 + 2\gamma_2 \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega}-\overline{\Omega})} \right), \quad (4.23)$$

отримуємо

$$\begin{aligned} |p_{u_k}(t, x) - p_{u_k}(s, y)| &\leq |p_{u_k}(t, x) - p_{u_k}(t, y)| + |p_{u_k}(t, y) - p_{u_k}(s, y)| \\ &\leq C [|x - y| + |t - s|], \\ \forall (t, x), (s, y) &\in \overline{Q_T} := [0, T] \times \overline{\Omega}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Таким чином,  $\{p_{u_k}\} \subset \mathfrak{S}$ . Оскільки  $\max_{(t,x) \in \overline{Q_T}} |p_{u_k}(t, x)| \leq p^+$  і кожен елемент послідовності  $\{p_{u_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  має однаковий модуль неперервності, то ця послідовність є рівномірно обмеженою та неперервною. Отже, за теоремою Arzelà–Ascoli послідовність  $\{p_{u_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  є компактною відносно сильної топології простору  $C(\overline{Q_T})$ . Беручи до уваги оцінку (4.24) та той факт, що множина  $\mathfrak{S}$  є замкненою відносно рівномірної збіжності також

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}_k(\tau, \cdot))(x)| d\tau &\rightarrow \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}(\tau, \cdot))(x)| d\tau \\ &\text{при } k \rightarrow \infty, \forall (t, x) \in Q_T \end{aligned}$$

за означенням слабкої збіжності в  $L^1(0, T; L^1(\Omega))$ , отримуємо:  $p_{u_k} \rightarrow p_u$  рівномірно в  $\overline{Q_T}$  при  $k \rightarrow \infty$ , де

$$p_u(t, x) = 1 + g \left( \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * \tilde{u}(\tau, \cdot))(\cdot)| d\tau \right)$$

в  $Q_T$ . □

#### 4.2.2. Тензор анізотропної дифузії

Нехай  $\mathbb{S}^2$  є множиною всіх симетричних матриць  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2$ , ( $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ ). Наділимо множину  $\mathbb{S}^2$  евклідовим скалярним добутком  $A \cdot B = \text{tr}(AB) := \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$  та відповідною евклідовою нормою  $\|A\|_{\mathbb{S}^2} = (A \cdot A)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^2)}$ . Введемо також спектральну норму  $\|A\|_2 := \sup \{ |A\xi| : \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ при } |\xi| = 1 \}$  для матриць  $A \in \mathbb{S}^2$ . В цьому випадку маємо таке співвідношення  $\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathbb{S}^2} \leq \sqrt{2} \|A\|_2$  для всіх  $A \in \mathbb{S}^2$ .

Нехай  $u \in L^1(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  є довільною функцією. Будемо вважати, що ця функція подовжена нулем поза множиною  $Q_T$ . Нехай  $u_\sigma(t, x)$  є результатом її згортки з 2-вимірним ядром Гауса та відхиленням  $\sigma > 0$  (див. (4.9)–(4.10)).

Виходячи головним чином з практичних застосувань до проблем обробки зображень [33, 62], визначаємо структурний тензор  $J_\rho(u_\sigma)$ , що є асоційований з функцією  $u : Q_T \mapsto \mathbb{R}$ , наступним чином

$$J_\rho(u_\sigma) := \frac{1}{h} \int_{t-h}^t G_\rho * (\nabla u_\sigma \otimes \nabla u_\sigma) \, d\tau = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t G_\rho * (\nabla u_\sigma (\nabla u_\sigma)^t) \, d\tau, \quad (4.25)$$

де через  $G_\rho$  позначено гаусове ядро згортки, та

$$\nabla u_\sigma(t, x) = (\nabla G_\sigma * \tilde{u}(t, \cdot))(x).$$

Легко бачити, що симетрична матриця  $J_\rho(u_\sigma) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{12} & j_{22} \end{bmatrix}$  є додатною та обмеженою в  $\Omega$ . Дійсно, для довільного  $\xi \in \mathbb{R}^2$  маємо

$$\begin{aligned} \xi^t J_\rho(u_\sigma) \xi &\leq 2 \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \int_{\Omega} G_\rho(x-y) |\nabla u_\sigma(\tau, \cdot)|^2 |\xi|^2 \, dx d\tau \\ &\leq \frac{2e^{-1}h^{-1}}{(\sqrt{2\pi}\rho)^2} |\Omega| \int_{t-h}^t \|u(\tau, \cdot)\|_{L^1(\Omega)}^2 \, d\tau \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega}-\Omega)}^2 |\xi|^2, \\ &\leq \frac{2e^{-1}}{(\sqrt{2\pi}\rho)^2} \|u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^2 \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega}-\Omega)}^2 |\Omega| |\xi|^2, \quad \forall (t, x) \in Q_T, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\xi^t J_\rho(u_\sigma) \xi = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \int_{\Omega} G_\rho(x-y) (\nabla u_\sigma(\tau, y), \xi)_{\mathbb{R}^2}^2 \, dy d\tau \geq 0, \quad \forall (t, x) \in Q_T. \quad (4.27)$$

Враховуючи цей факт, означимо ослаблену версію для тензора анізотропної дифузії  $D_u(t, x)$  і визначимо її наступним чином (для порівняння посилаємося на [2, 3])

$$D_u(t, x) := \gamma I + J_\rho(u_\sigma), \quad (4.28)$$

де  $0 < \gamma \ll 1$  є малим параметром, а  $I \in (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  є одиничною матрицею.



Тоді з (4.26)–(4.27) та (4.28) випливає, що для довільної функції  $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$  має місце двостороння оцінка

$$d_1^2 |\xi|^2 \leq \xi^t [D_u(t, x)]^2 \xi \leq d_2^2 |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (t, x) \in Q_T. \quad (4.29)$$

в якій

$$d_1 = \gamma, \quad d_2 = d_1 + \frac{2e^{-1}}{(\sqrt{2\pi}\rho)^2} \|u\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))}^2 |\Omega| \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega-\Omega})}^2.$$

Для подальшої зручності будемо вважати, що  $d_2 \geq 1$ .

Тоді за аналогією з лемою 4.2.1, можна встановити такий результат.

**Лема 4.2.2.** *Нехай  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $u \in L^1(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  є вимірними та продовженими нулем поза множиною  $Q_T$  функціями, які задовольняють умови (4.16). Нехай  $\{D_{u_k}(t, x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  є відповідною сукупністю анізотропних тензорів дифузії. Тоді*

$$d_1^2 |\xi|^2 \leq \xi^t [D_{u_k}(t, x)]^2 \xi \leq d_2^2 |\xi|^2, \quad \forall (t, x) \in Q_T, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (4.30)$$

$$D_{u_k}(t, x) \rightarrow D_u(t, x) \text{ рівномірно в } \overline{Q_T} \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (4.31)$$

$$\{D_{u_k}\} \subset \mathfrak{D}, \quad (4.32)$$

де

$$d_1 = \gamma, \quad d_2 = d_1 + \frac{2e^{-1}}{(\sqrt{2\pi}\rho)^2} \sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{L^\infty(0, T; L^1(\Omega))}^2 \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega-\Omega})}^2 |\Omega|,$$

$$\mathfrak{D} = \left\{ \Lambda \in C^{0,1}(Q_T; \mathbb{R}^{2 \times 2}) \left| \begin{array}{l} \|\Lambda(s, x) - \Lambda(t, y)\|_2 \leq C (|x - y| + |t - s|), \\ \forall (t, x), (s, y) \in \overline{Q_T}. \end{array} \right. \right\}$$

### 4.2.3. Простори Орлича

Нехай  $w \in L^1(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  є довільною функцією і нехай  $p_w : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  є відповідною змінною експонентою, яка означена за правилом (4.7). Тоді

$$1 < p^- \leq p_w(t, x) \leq p^+ < \infty \text{ м.с. в } Q_T \quad (4.33)$$

(див. лему 4.2.1), де сталі  $p^-$  та  $p^+$  визначені як в (4.17). Нехай  $p'_w(t, x) = \frac{p_w(t, x)}{p_w(t, x) - 1}$  є відповідною спряженою експонентою. Ясно, що

$$2 = \underbrace{\frac{p^+}{p^+ - 1}}_{(p^+)'} \leq p'_w(t, x) \leq \underbrace{\frac{p^-}{p^- - 1}}_{(p^-)'} = \frac{p^-}{\delta} \quad \text{м.с. в } Q_T, \quad (4.34)$$

де через  $(p^+)'$  та  $(p^-)'$  позначено спряжені величини до сталих експонент. Позначимо через  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$  множину всіх вимірних функцій  $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  таких, що

$$\rho_{p_w(t, x)}(f) := \int_{Q_T} |f(t, x)|^{p_w(t, x)} dx dt < \infty. \quad (4.35)$$

Наділивши цю множину нормою Люксембурга

$$\|f\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{Q_T} |\lambda^{-1} f(t, x)|^{p_w(t, x)} dx dt \leq 1 \right\}. \quad (4.36)$$

можна показати, що простір  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$  стає банаховим (деталі див. в [23, 31]). Насправді  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$  є певною специфікацією простору Musielak-Orlicz'а, який в свою чергу є узагальненням простору Лебега, оскільки багато його властивостей успадковують аналогічні властивості класичних лебегових просторів. Зокрема, двостороння нерівність (4.33) гарантує, що  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$  є рефлексивним і сепарабельним, а множина  $C_0^\infty(Q_T)$  є щільною в  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$ . Більше того, за виконання умови (4.33),  $L^\infty(Q_T) \cap L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$  є також щільним в  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T)$ . Щодо інших властивостей таких просторів, то вони є означеними в розділі 1.1.

#### 4.2.4. Ваговий енергетичний простір із змінною експонентою

Нехай  $D_w(t, x)$  є тензором дифузії, що пов'язаний з деякою функцією  $w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  та дається за правилом (4.28). Означимо ваговий простір  $W_w(Q_T)$  як множину усіх функцій  $u(t, x)$  таких, що

$$u \in L^2(Q_T), \quad u(t, \cdot) \in W^{1,1}(\Omega) \quad \text{для м.в. } t \in [0, T], \quad (4.37)$$

$$\int_{Q_T} |D_w(t, x) \nabla u|^{p_w(t, x)} dx dt < +\infty.$$

Введемо на просторі  $W_w(Q_T)$  таку норму

$$\|u\|_{W_w(Q_T)} = \|u\|_{L^2(Q_T)} + \|D_w \nabla u\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)}, \quad (4.38)$$

де другим доданком в (4.38) є норма вектор-функції  $D_w(t, x) \nabla u(t, x)$  в просторі Orlicz'а  $L^{p_w(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)$ . Оскільки (див. (4.29))

$$d_1^2 |\xi|^2 \leq \xi^t [D_w(t, x)]^2 \xi \leq d_2^2 |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (t, x) \in Q_T, \quad (4.39)$$

то  $W_w(Q_T)$ , з нормою (4.38) є рефлексивним банаховим простором. Оскільки експонента  $p_w : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  є ліпшитць-неперервною, то гладкі функції є щільними у ваговому прострі Sobolev-Orlicz'а  $W_w(Q_T)$  (див. [4]). Отже  $W_w(Q_T)$  можна подати як замикання множини  $\{\varphi \in C^\infty(\overline{Q_T})\}$  за нормою  $\|\cdot\|_{W_w(Q_T)}$ .

### 4.3. Про існування розв'язків для одного класу параболічних рівнянь зі змінним порядком нелінійності

Нехай  $f \in L^2(Q_T)$  та  $f_0 \in L^2(\Omega)$  є довільними розподіленнями. Розглянемо наступну початково-крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u = f \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \quad (4.40)$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.41)$$

$$u(0, \cdot) = f_0 \quad \text{в } \Omega. \quad (4.42)$$

Тут

$$A_w(t, x, \nabla u) := |D(t, x, w) \nabla u|^{p_w(t, x)-2} D(t, x, w) \nabla u, \quad (4.43)$$

експонента  $p_w : Q_T \rightarrow (1, 2]$  задається правилом (4.7), симетрична матриця  $D(t, x, w)$  означена в (4.28), а через  $\partial_\nu$  позначено похідну за зовнішньою одиничною нормаллю.

Як впливає з (4.43), (4.28), та леми 4.2.1, для кожної фіксованої  $w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ , відображення  $(t, x, \xi) \mapsto A_w(t, x, \xi)$  є вектор-функцією Carathéodory, тобто  $A_w(t, x, \xi)$  є неперервною за  $\xi \in \mathbb{R}^N$  та вимірною відносно

$(t, x)$  при кожному  $\xi \in \mathbb{R}^N$ . Більше того, властивості монотонності, коерцитивності та обмеженості виконуються при м.в.  $(t, x) \in Q_T$  [83]:

$$\left( A_w(t, x, \xi) - A_w(t, x, \zeta), \xi - \zeta \right) \geq 0, \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^N, \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} (A_w(t, x, \xi), \xi) &= |D(t, x, w)\xi|^{p_w(t, x)-2} (D(t, x, w)\xi, D^{-1}(t, x, w)D(t, x, w)\xi) \\ &\stackrel{(4.39)}{\geq} d_2^{-1} d_1^{p_w(t, x)} |\xi|^{p_w(t, x)} \geq d_2^{-1} d_1^2 |\xi|^{p_w(t, x)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$|A_w(t, x, \xi)|^{p'_w(t, x)} \leq d_2^{p_w(t, x)} |\xi|^{p_w(t, x)} \leq d_2^2 |\xi|^{p_w(t, x)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (4.46)$$

Проте в загальному випадку,  $-\operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u$  є прикладом сильно нелінійного, немонотонного та некоерцитивного дивергентного оператора. Отже, результат щодо розв'язаності задачі (4.40)–(4.42) та єдиність її розв'язку залишаються відкритими питаннями на сьогоднішній день [41, Chapter III].

**Означення 4.3.1.** Будемо казати, що при заданих  $f \in L^2(Q_T)$  та  $f_0 \in L^2(\Omega)$ , функція  $u$  є слабким розв'язком задачі (4.40)–(4.42), якщо  $u \in W_u(Q_T)$ , тобто

$$\begin{aligned} u &\in L^2(Q_T), \quad u(t, \cdot) \in W^{1,1}(\Omega) \quad \text{для м.в. } t \in [0, T], \\ \int_{Q_T} |D(t, x, u)\nabla u|^{p_u(t, x)} dx dt &< +\infty, \end{aligned} \quad (4.47)$$

і при цьому інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left( -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (A_u(t, x, \nabla u), \nabla \varphi) + u \varphi \right) dx dt &= \\ &= \int_{Q_T} f \varphi dx dt + \int_{\Omega} f_0 \varphi|_{t=0} dx \end{aligned} \quad (4.48)$$

є вірною для всіх  $\varphi \in \Phi$ , де  $\Phi = \{ \varphi \in C^\infty(\overline{Q_T}) : \varphi|_{t=T} = 0 \}$ .

Щоб з'ясувати, в якому сенсі слабкий розв'язок приймає початкове значення  $u(0, \cdot) = f_0$ , наведемо такий результат (для доведення див. твердження 3.1.1).

**Твердження 4.3.1.** Нехай  $f \in L^2(Q_T)$  та  $f_0 \in L^2(\Omega)$  є заданими розподіленнями і нехай  $u \in W_u(Q_T)$  є слабким розв'язком задачі (4.40)–(4.42). Тоді для будь-якого  $\eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$  скалярна функція  $h(t) = \int_{\Omega} u(t, x)\eta(x) dx$  належить простору  $W^{1,1}(0, T)$  і при цьому  $h(0) = \int_{\Omega} f_0(x)\eta(x) dx$ .

Основною метою даного розділу є показати існування слабого розв'язку задачі (4.40)–(4.42). Для цього скористаємося технікою збурень та класичною теоремою про нерухому точку Шаудера [69] (див. [36, 45, 50], де залучався подібний підхід).

Розпочнемо з наступного проміжного результату.

**Теорема 4.3.1.** Нехай  $f \in L^2(Q_T)$  та  $f_0 \in L^2(\Omega)$  є заданими розподіленнями. Тоді для кожного додатного значення  $\epsilon > 0$ , задача Коші-Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \Delta u - \operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + u = f \quad \text{в } Q_T := (0, T) \times \Omega, \quad (4.49)$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.50)$$

$$u(0, \cdot) = f_0 \quad \text{в } \Omega, \quad (4.51)$$

має слабкий розв'язок  $u_\epsilon \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$ , що задовольняє (4.49)–(4.51) в сенсі розподілень.

*Доведення.* Введемо до розгляду простір

$$W(0, T) = \left\{ w \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; [W^{1,2}(\Omega)]') \right\}.$$

Цей простір є гільбертовим відносно норми графіка. Оберемо довільну функцію  $w \in W(0, T) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  таку, що

$$\left. \begin{aligned} \|w\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} &\leq C_1, \\ \|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \sqrt{2}C_1, \\ \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))')} &\leq C_3, \\ w(0, \cdot) &= f_0 \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

де

$$C_1 = \sqrt{\|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + 2\|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2},$$

$$C_2 = \left( \frac{d_2}{d_1^2} C_1^2 + 1 \right)^{1/p^-},$$

$$C_3 = 2C_1 + \|f\|_{L^2(Q_T)} + (1 + d_2^2 (1 + C_2^2))^{1/2} (1 + T|\Omega|)^{1/2}.$$

Для зручності розіб'ємо решту доведення на декілька кроків.

**Крок 1.** Пов'яжемо з функцією  $w$  наступну варіаційну задачу: знайти  $u = U_\epsilon(w) \in W(0, T)$ , яка задовольняє варіаційну рівність

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v \right\rangle + \int_{\Omega} [\epsilon (\nabla u(t), \nabla v) + (A_w(t, x, \nabla u(t)), \nabla v) + u(t)v] dx \\ = \int_{\Omega} f(t)v dx, \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{м.с. в } [0, T], \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$u(0) = f_0. \quad (4.54)$$

Оскільки включення  $w \in W(0, T)$  гарантує, що  $w \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  (див. [30, Chapter XVIII]), то з леми 4.2.1 випливає, що відповідна експонента

$$p_w := 1 + g \left( \frac{1}{h} \int_{t-h}^t |(\nabla G_\sigma * w(\tau, \cdot))|^2 d\tau \right)$$

є такою, що  $p_w \in C^{0,1}(Q_T)$  і  $1 < p^- \leq q(\cdot, \cdot) \leq p^+$  в  $\overline{Q_T}$ , де  $p^+ = 2$  та  $p^- = 1 + \delta = 1 + ah \left[ ah + \|G_\sigma\|_{C^1(\overline{\Omega-\Omega})}^2 |\Omega| \sup_{k \in \mathbb{N}} \|w\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right]^{-1}$ .

Більше того, бачимо, що матриця  $J_\rho(w_\sigma)$  належить  $C^\infty$  і як випливає з (4.28),  $D(\cdot, \cdot, w) \in L^\infty(0, T; C^\infty(\Omega))$ , де тензор анізотропності  $D(t, x, w)$  задовольняє двосторонню нерівність (4.29). Отже, при заданому  $\epsilon > 0$ , оператор  $B : L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega))')$ , який означено за правилом

$$\langle Bu, v \rangle = \int_{Q_T} (\epsilon \nabla u + A_w(t, x, \nabla u), \nabla v) dxdt + \int_{Q_T} uv dxdt,$$

є коерцитивним, монотонним та хемі-неперервним, де хемі-неперервність означає неперервність скалярної функції

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= \langle B(u + \lambda v), \varphi \rangle = \\ &= \int_{Q_T} (\epsilon (\nabla u + \lambda \nabla v) + A_w(t, x, \nabla u + \lambda \nabla v), \nabla \varphi) dxdt + \end{aligned}$$

$$+ \int_{Q_T} (u + \lambda v) v \, dx dt, \quad \forall u, v, \varphi \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$$

в точці  $\lambda = 0$ . Оскільки  $A_w$  є функцією Carathéodory, то цю властивість легко встановити виходячи з теореми Лебега та оцінки

$$\begin{aligned} |A_w(t, x, \nabla u + \lambda \nabla v)| |\nabla \varphi| &\leq \frac{1}{p'_w(t, x)} |A_w(t, x, \nabla u + \\ &+ \lambda \nabla v)|^{p'_w(t, x)} + \frac{1}{p_w(t, x)} |\nabla \varphi|^{p_w(t, x)} \leq \\ &\stackrel{\text{by (4.17), (4.46)}}{\leq} \frac{d_2^2}{2} |\nabla u + \lambda \nabla v|^{p_w(t, x)} + \frac{1}{\alpha} |\nabla \varphi|^{p_w(t, x)} \leq \\ &\leq c_1 \left( |\nabla u|^{p_w(t, x)} + |\nabla v|^{p_w(t, x)} \right) + \frac{1}{\alpha} |\nabla \varphi|^{p_w(t, x)} \in L^1(Q_T). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Отже, виходячи з класичних результатів щодо параболічних рівнянь [60] (див. також результати Алхутова та Жикова [4, 5]) бачимо, що задача (4.53)–(4.54) має єдиний слабкий розв'язок  $U_\epsilon(w) \in W(0, T)$  у сенсі розподілень. Оскільки інтегральна тотожність (4.53) дійсна для всіх тестових функцій  $v = v(t, x)$ , які є кусково-сталими відносно  $t$ , то звідсіля випливає, що ця тотожність залишається вірною для всіх  $v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$ , а отже, і для всіх  $v \in W^{1,2}(Q_T)$  таких, що  $v(T, \cdot) = 0$ . Тепер залучаючи формулу інтегрування частинами, можна легко показати з (4.53), що розв'язок  $U_\epsilon(w)$  задовольняє як інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left( -U_\epsilon(w) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\epsilon \nabla U_\epsilon(w) + A_w(t, x, \nabla U_\epsilon(w)), \nabla \varphi) + U_\epsilon(w) \varphi \right) dx dt \\ = \int_{Q_T} f \varphi \, dx dt + \int_{\Omega} f_0 \varphi|_{t=0} \, dx \quad \forall \varphi \in \Phi \end{aligned} \quad (4.56)$$

так і енергетичну рівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_\epsilon^2(w) \, dx + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon |\nabla U_\epsilon(w)|^2 + (A_w(t, x, \nabla U_\epsilon(w)), \nabla U_\epsilon(w)) + U_\epsilon^2(w)) \, dx dt \\ = \int_{Q_T} f U_\epsilon(w) \, dx dt + \int_{\Omega} f_0^2 \, dx, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

**Крок 2.** Приймаючи до уваги (4.57), отримуємо оцінки:

$$\|U_\epsilon(w)\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + 2\|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 =: C_1^2, \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla U_\epsilon(w)\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)} &\stackrel{(1.8)}{\leq} \left( \int_{Q_T} |\nabla U_\epsilon(w)|^{p_w(t,x)} dx dt + 1 \right)^{1/p^-} \\
&\stackrel{(4.57)}{\leq} \left( \frac{d_2}{d_1^2} \left( \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|U_\epsilon(w)\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) + 1 \right)^{1/p^-} \\
&\stackrel{(4.58)}{\leq} \left( \frac{d_2}{d_1^2} C_1^2 + 1 \right)^{1/p^-} =: C_2, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|U_\epsilon(w)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \sqrt{2 \left( \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|U_\epsilon(w)\|_{L^2(Q_T)}^2 \right)} \leq \\
&\leq \sqrt{2} C_1, \tag{4.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla U_\epsilon(w)\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)} &\leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left( \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|U_\epsilon(w)\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} C_1. \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Зауважимо також, що

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \frac{\partial U_\epsilon(w)}{\partial t}, v \right\rangle \right| &\stackrel{(4.53), (1.12)}{\leq} \sqrt{\epsilon} \|\nabla U_\epsilon(w)\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)} \|\nabla v\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)} \\
&\quad + 2 \|A_w(t, x, \nabla U_\epsilon(w))\|_{L^{p'_w(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)} \|\nabla v\|_{L^{p_w(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \|U_\epsilon\|_{L^2(Q_T)} \|v\|_{L^2(Q_T)} + \|f\|_{L^2(Q_T)} \|v\|_{L^2(Q_T)} \\
&\stackrel{(1.11)}{\leq} \left[ \sqrt{\epsilon} \|\nabla U_\epsilon(w)\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)} + \|U_\epsilon\|_{L^2(Q_T)} + \|f\|_{L^2(Q_T)} \right] \times \\
&\quad \times \|v\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \\
&\quad + \left( 1 + \int_{Q_T} |A_w(t, x, \nabla U_\epsilon(w))|^{p'_w(t,x)} dx dt \right)^{1/2} \times \\
&\quad \times (1 + T|\Omega|)^{1/2} \|v\|_{L^2(Q_T)} \\
&\stackrel{(4.58)-(4.61)}{\leq} C_3 \|v\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}, \quad \forall v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \tag{4.62}
\end{aligned}$$

де

$$C_3 := 2C_1 + \|f\|_{L^2(Q_T)} + (1 + d_2^2 (1 + C_2^2))^{1/2} (1 + T|\Omega|)^{1/2}.$$

Отже,

$$\left\| \frac{\partial U_\epsilon(w)}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega)))'} \leq C_3. \tag{4.63}$$



Приймаючи до уваги отримані оцінки, введемо до розгляду підмножину  $W_0$  простору  $W(0, T)$

$$W_0 = \left\{ z \in W(0, T) \left| \begin{array}{l} \|z\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) C_1, \\ \|z\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} C_1, \\ \left\| \frac{\partial z}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega))')} \leq C_3, \\ z(0, \cdot) = f_0 \end{array} \right. \right\}$$

З огляду на оцінки (4.58)–(4.62) та умову (4.52), стає зрозуміло, що  $w \in W_0$  а, отже,  $U_\epsilon$  можна інтерпретувати як відображення з  $W_0$  в  $W_0$ . Крім того, ми бачимо, що  $W_0$  є непорожньою, опуклою та слабо компактною підмножиною  $W(0, T)$ . Отже, щоб застосувати теорему Шаудера про нерухому точку, залишається показати, що відображення  $U_\epsilon$  є слабо неперервним з  $W_0$  в  $W_0$ . Оскільки вкладення  $W^{1,2}(\Omega)$  в  $L^2(\Omega)$  є компактим, то уточнення леми Aubin'а (див., наприклад, [76, Section 8, Corollary 4] гарантує, що будь-яка обмежена підмножина  $W(0, T)$  є відносно компактною в  $L^2(Q_T)$ . У результаті, залучення теорема Шаудера про нерухому точку гарантує існування елемента  $u_\epsilon$  у  $W_0$  такого, що  $u_\epsilon = U_\epsilon(u_\epsilon)$ .

**Крок 3.** Нехай  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{R}}$  є послідовністю в  $W_0$ , яка слабо збігається в  $W_0$  до деякого  $w \in W_0$ . Поклавши  $u_{\epsilon,j} = U_\epsilon(w_j)$  та скориставшись слабкою компактністю множини  $W_0$ , бачимо, що  $\{u_{\epsilon,j}\}_{j \in \mathbb{R}}$  містить підпослідовність, для якої

$$u_{\epsilon,j} \rightharpoonup u_\epsilon \quad \text{слабо в } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial u_{\epsilon,j}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; (W^{1,2}(\Omega))'), \quad (4.65)$$

$$u_{\epsilon,j} \rightarrow u_\epsilon \quad \text{сильно в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ і м.с. в } Q_T, \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial u_{\epsilon,j}}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.67)$$

$$w_j \rightarrow w \quad \text{сильно в } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.68)$$

Тоді леми 4.2.1 and 4.2.2 гарантують рівномірну збіжність

$$D(t, x, w_j) \rightarrow D(t, x, w) \text{ та } p_{w_j}(t, x) \rightarrow p_w(t, x) \quad \text{в } \overline{Q_T} \text{ при } j \rightarrow \infty. \quad (4.69)$$

Більше того, беручи до уваги, що

$$\begin{aligned}
\|A_{w_j}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j})\|_{L^{\beta'}(Q_T; \mathbb{R}^N)}^{\beta'} &\stackrel{(1.10)}{\leq} (1 + T|\Omega|) \|A_{w_j}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j})\|_{L^{p'_{w_j}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)}^{\beta'} \\
&\stackrel{(1.8)}{\leq} (1 + T|\Omega|) \left(1 + \int_{Q_T} |A_{w_j}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j})|^{p'_{w_j}(t,x)} dx dt\right) \\
&\stackrel{(4.46)}{\leq} (1 + T|\Omega|) \left(1 + d_2^2 \int_{Q_T} |\nabla u_{\epsilon,j}|^{p_{w_j}} dx dt\right) \stackrel{(4.59)}{<} \infty,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

з (4.61) та (4.34) отримуємо, що послідовність  $\{\epsilon \nabla u_{\epsilon,j} + A_{w_j}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j})\}_{j \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в  $L^{\beta'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$ . Отже, можна вважати, що знайдеться елемент  $z \in L^{\beta'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  такий, що

$$\epsilon \nabla u_{\epsilon,j} + A_{w_j}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j}) \rightharpoonup z \quad \text{слабко в } L^{\beta'}(Q_T; \mathbb{R}^N) \text{ при } j \rightarrow \infty. \tag{4.71}$$

Беручи до уваги цей факт, а також властивості

$$\begin{aligned}
u_{\epsilon,j} &\rightharpoonup u_\epsilon \quad \text{в } L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)) \text{ при } p^- = 1 + \delta \text{ (за (4.64))}, \\
\{u_{\epsilon,j}\}_{j \in \mathbb{N}} &\text{ є обмеженими в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ (за (4.60))}, \\
u_{\epsilon,j} &\in L^{p^+}(0, T; W^{1,p^+}(\Omega)) \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ за (4.61)}, \\
\sup_{j \in \mathbb{N}} \| (A_{w_j}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j}), \nabla u_{\epsilon,j}) \|_{L^1(Q_T)} &< \infty \text{ (за (4.55))},
\end{aligned} \tag{4.72}$$

і той факт, що  $1 < 1 + \delta = p^- < p^+ = 2 < 2p^-$ , з теореми 1.4.2 випливає, що потік  $A_{w_j}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j})$  слабко збігається в  $L^{\beta'}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  до потоку  $A_w(t, x, \nabla u_\epsilon)$ , тобто  $z = A_w(t, x, \nabla u_\epsilon)$ .

Отже, можемо перейти до границі в (4.53)–(4.54) при  $u = u_{\epsilon,j}$  та  $w = w_j$ , якщо  $j \rightarrow \infty$ . Як результат, отримуємо

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial u_\epsilon(t)}{\partial t}, v \right\rangle + \int_{\Omega} [\epsilon (\nabla u_\epsilon(t), \nabla v) + (A_w(t, x, \nabla u_\epsilon(t)), \nabla v) + u_\epsilon(t)v] dx \\
= \int_{\Omega} f(t)v dx, \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{м.с. в } [0, T],
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$u_\epsilon(0) = f_0, \tag{4.74}$$

тобто  $u_\epsilon = U_\epsilon(w)$ . Більше того, оскільки варіаційна задача (4.73)–(4.74) має єдиний розв'язок, то і вся послідовність  $\{u_{\epsilon,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  також збігається слабко в  $W(0, T)$  до  $u_\epsilon = U_\epsilon(w)$ .

Таким чином, відображення  $U_\epsilon : W_0 \mapsto W_0$  є слабо неперервним, а отже за теоремою Schauder'а про нерухому точку,  $u_\epsilon$  є слабким розв'язком збуреної задачі (4.49)–(4.51).  $\square$

**Зауваження 4.3.1.** *Оскільки питання щодо єдиності слабких розв'язків збуреної задачі (4.49)–(4.51) залишається відкритим, будемо називати слабкий розв'язок  $u_\epsilon$ , існування якого гарантується теоремою 4.3.1, як  $W_0$ -досяжний розв'язок.*

**Наслідок 4.3.1.** *Для будь-яких  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$ , та при будь-якому додатньому значенні  $\epsilon > 0$ , задача Коші-Неймана (4.49)–(4.51) допускає принаймні один  $W_0$ -досяжний слабкий розв'язок.*

Як прямий наслідок попередніх результатів, можемо вказати такі додаткові властивості  $W_0$ -досяжних розв'язків.

**Наслідок 4.3.2.** *Нехай  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  та  $\epsilon > 0$  є заданими. Нехай  $u_\epsilon \in W(0, T)$  є  $W_0$ -досяжним слабким розв'язком задачі (4.49)–(4.51). Тоді  $u_\epsilon$  є слабким розв'язком цієї задачі в сенсі означення 4.3.1, який задовольняє енергетичну рівність*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_\epsilon^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (\epsilon |\nabla u_\epsilon|^2 + (A_{u_\epsilon}(t, x, \nabla u_\epsilon), \nabla u_\epsilon) + u_\epsilon^2) dx dt \\ = \int_{Q_T} f u_\epsilon dx dt + \int_{\Omega} f_0^2 dx \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

*Доведення.* Як випливає з (4.56), якщо  $u_\epsilon$  є слабким розв'язком задачі (4.49)–(4.51) в сенсі розподілень, то  $u_\epsilon$  задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left( -u_\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \epsilon (\nabla u_\epsilon, \nabla \varphi) + (A_{u_\epsilon}(t, x, \nabla u_\epsilon), \nabla \varphi) + u_\epsilon \varphi \right) dx dt \\ = \int_{Q_T} f \varphi dx dt + \int_{\Omega} f_0 \varphi|_{t=0} dx \quad \forall \varphi \in \Phi. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Отже, для того щоб показати, що  $u_\epsilon$  є слабким розв'язком, досить встановити включення  $u_\epsilon \in W_{u_\epsilon}(Q_T)$ . Виходячи з означення простору  $W_{u_\epsilon}(Q_T)$  (див. (4.47)), ми покажемо, що

$$\int_{Q_T} |D(t, x, u_\epsilon) \nabla u_\epsilon|^{p_{u_\epsilon}(t, x)} dx dt < +\infty \quad \text{для м.в. } t \in [0, T].$$

Оскільки  $u_\epsilon \in W_0$ -досяжним розв'язком задачі (4.49)–(4.51), то знайдеться послідовність  $\{u_{\epsilon,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \in W_0$  з властивостями (4.64)–(4.67) така, що  $u_{\epsilon,j} = U_\epsilon(u_{\epsilon,j-1})$  для  $j = 2, 3, \dots$ . Ця послідовність, як відомо, задовольняє властивості (4.71)–(4.72). Отже,  $\nabla u_{\epsilon,j} \in L^1(Q_T; \mathbb{R}^N)$  за умовою (4.64), та

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} [|\nabla u_{\epsilon,j}|^{p_{u_{\epsilon,j}}} + \epsilon |\nabla u_{\epsilon,j}|^2] \, dxdt \\ & \leq \max \left\{ 1, \frac{d_2}{d_1^2} \right\} \int_{Q_T} \left[ \frac{d_1^2}{d_2} |\nabla u_{\epsilon,j}|^{p_{u_{\epsilon,j}}} + \epsilon |\nabla u_{\epsilon,j}|^2 \right] \, dxdt \\ & \leq \max \left\{ 1, \frac{d_2}{d_1^2} \right\} \sup_{j \in \mathbb{N}} \int_{Q_T} [ | (A_{u_{\epsilon,j-1}}(t, x, \nabla u_{\epsilon,j}), \nabla u_{\epsilon,j}) | + \epsilon |\nabla u_{\epsilon,j}|^2 ] \, dxdt \\ & \stackrel{(4.45), (4.72)}{<} \infty, \end{aligned} \tag{4.77}$$

$$|\nabla u_{\epsilon,j}|^{p_{u_{\epsilon,j}}} + \epsilon |\nabla u_{\epsilon,j}|^2 \stackrel{(4.71)}{\underset{z}{\in}} L^{\beta'}(Q_T). \tag{4.78}$$

В результаті, з леми 1.4.5 отримуємо  $z \in L^{p_{u_\epsilon}(\cdot)}(Q_T)$ . Тому

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |D(t, x, u_\epsilon) \nabla u_\epsilon|^{p_{u_\epsilon}(t,x)} \, dxdt & \leq d_2^2 \int_{Q_T} |\nabla u_\epsilon|^{p_{u_\epsilon}(t,x)} \, dxdt \\ & \stackrel{(1.8)}{\leq} d_2^2 \left( \|\nabla u_\epsilon\|_{L^{p_{u_\epsilon}(\cdot)}(Q_T)}^2 + 1 \right) \\ & \stackrel{(4.59)}{\leq} d_2^2 (C_2 + 1) < +\infty. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Таким чином,  $u_\epsilon \in W_{u_\epsilon}(Q_T)$ , а отже за означенням 4.3.1,  $u_\epsilon$  є слабким розв'язком задачі (4.49)–(4.51).

Залишається показати, що є вірною енергетична рівність (4.75). Оскільки  $u_\epsilon$  лежить в  $W(0, T)$  а множина тестових функцій  $C^\infty([0, T]; C_c^\infty(\mathbb{R}^N))$  є щільною в  $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$ , то знайдеться послідовність

$$\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C^\infty([0, T]; C_c^\infty(\mathbb{R}^N))$$

така, що

$$\varphi_j \rightarrow u_\epsilon \quad \text{в } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \tag{4.80}$$

Беручи до уваги, що для кожного  $j \in \mathbb{N}$  виконується інтегральна тотожність

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} [\epsilon (\nabla u_{\epsilon}(t), \nabla \varphi_j(t)) + (A_{u_{\epsilon}}(t, x, \nabla u_{\epsilon}(t)), \nabla \varphi_j(t)) + u_{\epsilon}(t) \varphi_j(t)] \, dx dt + \\
& + \int_0^t \left\langle \frac{\partial u_{\epsilon}(t)}{\partial t}, \varphi_j(t) \right\rangle \, dt = \int_0^t \int_{\Omega} f(t) \varphi_j(t) \, dx dt, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T],
\end{aligned} \tag{4.81}$$

перейдемо до границі в (4.81) при  $j \rightarrow \infty$ . Для цього зауважимо, що

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} (A_{u_{\epsilon}}(t, x, \nabla u_{\epsilon}(t)), \nabla \varphi_j(t)) \, dx dt = \\
& = \int_0^t \int_{\Omega} (A_{u_{\epsilon}}(t, x, \nabla u_{\epsilon}(t)), \nabla u_{\epsilon}(t)) \, dx dt + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} (A_{u_{\epsilon}}(t, x, \nabla u_{\epsilon}(t)), \nabla \varphi_j(t) - \nabla u_{\epsilon}(t)) \, dx dt,
\end{aligned}$$

де  $\nabla \varphi_j - \nabla u_{\epsilon} \rightarrow 0$  м.с в  $Q_T$  в силу (4.80), і

$$|(A_{u_{\epsilon}}(t, x, \nabla u_{\epsilon}), \nabla \varphi_j - \nabla u_{\epsilon})| \leq c_1 |\nabla u_{\epsilon}|^{p_{u_{\epsilon}}} + \frac{1}{\alpha} |\nabla \varphi_j - \nabla u_{\epsilon}|^{p_{u_{\epsilon}}} \in L^1(Q_T)$$

за умовою (4.55). Отже, за теоремою Лебега, граничний перехід в (4.81) приводить до співвідношення

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega} [\epsilon (\nabla u_{\epsilon}(t), \nabla u_{\epsilon}(t)) + (A_w(t, x, \nabla u_{\epsilon}(t)), \nabla u_{\epsilon}(t)) + u_{\epsilon}^2(t)] \, dx dt \\
& + \int_0^t \left\langle \frac{\partial u_{\epsilon}(t)}{\partial t}, u_{\epsilon}(t) \right\rangle \, dt = \int_0^t \int_{\Omega} f(t) u_{\epsilon}(t) \, dx dt, \quad \forall t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Таким чином, щоб отримати енергетичну рівність (4.75), залишається скористатися формулою інтегрування за частинами.  $\square$

Перш ніж перейти до основного результату даного параграфу, неведемо один технічний результат

**Лема 4.3.1.** *Нехай  $\{u_{\epsilon}\}_{\epsilon \rightarrow 0} \subset W(0, T)$  є послідовністю такою, що*

$$\sup_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \epsilon \int_{Q_T} |\nabla u_{\epsilon}|^2 \, dx dt \right) < +\infty. \tag{4.83}$$

*Тоді  $\epsilon \nabla u_{\epsilon} \rightharpoonup 0$  в  $L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)$ .*

*Доведення.* Нехай  $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$  є довільною вектор-функцією. Тоді

$$\left| \int_{Q_T} (\epsilon \nabla u_\epsilon, \varphi) \, dxdt \right| \leq \sqrt{\epsilon} \left( \int_{Q_T} \epsilon |\nabla u_\epsilon|^2 \, dxdt \right)^{1/2} \left( \int_{Q_T} |\varphi|^2 \, dxdt \right)^{1/2}.$$

Отже послідовність  $\{\epsilon \nabla u_\epsilon\}_{\epsilon \rightarrow 0}$  є обмеженою в  $L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)$ . Як результат, маємо

$$\left| \int_{Q_T} (\epsilon \nabla u_\epsilon, \varphi) \, dxdt \right| \stackrel{\text{by (4.83)}}{\leq} C \sqrt{\epsilon} \left( \int_{Q_T} \epsilon |\nabla u_\epsilon|^2 \, dxdt \right)^{1/2} \leq \hat{C} \sqrt{\epsilon} \rightarrow 0.$$

□

Тепер перейдемо до доведення основного результату.

**Теорема 4.3.2.** *Нехай  $f \in L^2(Q_T)$  та  $f_0 \in L^2(\Omega)$  є заданими розподіленнями. Тоді початково-крайова задача (4.40)–(4.42) допускає принаймні один слабкий розв’язок  $u \in W_u(Q_T)$ .*

*Доведення.* Нехай  $\epsilon$  є малим параметром, який змінюється в межах строго спадної послідовності додатних чисел, що сходяться до 0. Нехай сукупність  $\{u_\epsilon \in W(0, T)\}_{\epsilon \rightarrow 0}$  є послідовністю  $W_0$ -досяжних слабких розв’язків задачі (4.49)–(4.51). Тоді при кожному  $\epsilon > 0$  функції  $u_\epsilon$  задовольняють інтегральну тотожність (4.76) та енергетичну рівність (4.75). Отже, з (4.75) отримуємо такі оцінки

$$\sup_{\epsilon > 0} \|u_\epsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C_1^2 = \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + 2\|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\epsilon > 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^{p_{u_\epsilon}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)} &\stackrel{(1.8)}{\leq} \sup_{\epsilon > 0} \left( \int_{Q_T} |\nabla u_\epsilon|^{p_{u_\epsilon}(t,x)} \, dxdt + 1 \right)^{1/p^-} \\ &\stackrel{(4.75)}{\leq} \sup_{\epsilon > 0} \left( \frac{d_2}{d_1^2} \left( \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) + 1 \right)^{1/p^-} \\ &\stackrel{(4.84)}{\leq} C_2 = \left( \frac{d_2}{d_1^2} C_1^2 + 1 \right)^{1/p^-}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\epsilon > 0} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^{p^-}(Q_T; \mathbb{R}^N)} &\stackrel{(1.10)}{\leq} \sup_{\epsilon > 0} (1 + T|\Omega|)^{1/p^-} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^{p_{u_\epsilon}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^N)} \\ &\stackrel{(4.85)}{\leq} (1 + T|\Omega|)^{1/p^-} C_2, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \sup_{\epsilon > 0} \|u_\epsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \sup_{\epsilon > 0} \sqrt{2 \left( \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 \right)} \\ &\leq \sqrt{2} C_1, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(Q_T;\mathbb{R}^N)} &\leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left( \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|u_\epsilon\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} C_1^2. \end{aligned} \quad (4.88)$$

В силу отриманих оцінок, бачимо, що послідовність  $\{u_\epsilon\}_{\epsilon \rightarrow 0}$  є обмеженою в  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  та в  $L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$ . Отже знайдеться елемент

$$u \in L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (4.89)$$

такий що з точністю до підпослідовності  $u_\epsilon \rightharpoonup u$  в  $L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Окрім цього, рівномірна обмеженість потоків  $\{A_{u_\epsilon}(t, x, \nabla u_\epsilon)\}_{\epsilon \rightarrow 0}$  в  $L^{p^+}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  відносно  $\epsilon > 0$  гарантує, що ця послідовність є секвенційно слабо компактною в  $L^{p^+}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  (за деталями див. (4.70)). Отже можемо вважати, що існує вектор-функція  $w$  така, що  $w_\epsilon = A_{u_\epsilon}(t, x, \nabla u_\epsilon) \rightharpoonup w$  в  $L^{p^+}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Залучаючи міркування, аналогічні доведенню теореми 4.3.1, можна показати, що  $\sup_{\epsilon \rightarrow 0} \|(w_\epsilon, \nabla u_\epsilon)\|_{L^1(Q_T)} < \infty$ . В результаті, з теореми 1.4.2 отримуємо, що потік  $A_{u_\epsilon}(t, x, \nabla u_\epsilon)$  слабо збігається в  $L^{p^+}(Q_T; \mathbb{R}^N)$  до потоку  $w = A_u(t, x, \nabla u)$ . Отже, як впливає з леми 4.3.1, граничний перехід в інтегральній тотожності (4.76) приводить до подібної рівності для рівняння (4.40). Залишається взяти до уваги лему 1.4.5 та співвідношення (4.77)–(4.78) для того, щоб прийти до висновку:  $\int_{Q_T} |D(t, x, u) \nabla u|^{p_u(t,x)} dx dt < +\infty$ . Таким чином,  $u$  належить простору  $W_u(Q_T)$  і як наслідок маємо:  $u$  є слабким розв'язком задачі (4.40)–(4.42).  $\square$

Результат теореми 4.3.2 можна доповнити таким твердженням.

**Наслідок 4.3.3.** *Нехай  $u \in W_u(Q_T)$  є слабким розв'язком задачі (4.40)–(4.42). Припустимо, що цей розв'язок є кластерною точкою послідовності  $W_0$ -досяжних розв'язків  $\{u_\epsilon \in W(0, T)\}_{\epsilon \rightarrow 0}$ . Тоді для всіх  $t \in [0, T]$  є*

вірною така енергетична нерівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} ((A_u(t, x, \nabla u), \nabla u) + u^2) dx dt \leq \\ \leq \int_{Q_T} f u dx dt + \int_{\Omega} f_0^2 dx. \end{aligned} \quad (4.90)$$

*Доведення.* Щоб отримати дану нерівність, досить перейти до границі в (4.75) при  $\epsilon \rightarrow 0$  залучаючи слабку збіжність  $u_{\epsilon} \rightharpoonup u$  в  $L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$ , лему 1.4.4 та слабку збіжність потоків (див. теорему 1.4.2).  $\square$

**Наслідок 4.3.4.** *Припустимо, що  $N = 2$  і нехай  $u \in W_u(Q_T)$  є слабким розв'язком задачі (4.40)–(4.42), який отримано як кластерну точку послідовності  $W_0$ -досяжних розв'язків  $\{u_{\epsilon} \in W(0, T)\}_{\epsilon \rightarrow 0}$ . Тоді має місце наступний результат:  $u \in L^{2p^-}(Q_T)$  з оцінкою*

$$\|u\|_{L^{2p^-}(Q_T)} \leq \left( \sqrt{2} C_1 C_2 (1 + T|\Omega|)^{\frac{1}{p^-}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.91)$$

де показник  $p^- > 1$  дається правилом (4.17), а сталі  $C_1$  та  $C_2$  визначені в (4.84) та (4.85), відповідно.

*Доведення.* Як впливає з апіорних оцінок (4.86)–(4.87), даний слабкий розв'язок задовольняє включенню (4.89). Отже, у випадку  $N = 2$  це твердження разом із оцінкою (4.91) впливає з наслідку 1.1.1.  $\square$

На завершення даного параграфу, повернемося до вихідної початково-крайової задачі (4.2)–(4.4) та спроекуємо на неї одержані вище результати. Для цього перепишемо задачу (4.2)–(4.4) у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + \kappa u = \kappa(f - v) \quad \text{in } Q_T, \quad (4.92)$$

$$\partial_{\nu} u = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.93)$$

$$u(0, \cdot) = f_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (4.94)$$

де

$$A_w(t, x, \nabla u) := |D_w(t, x) \nabla u|^{p_w(t, x)-2} D_w(t, x) \nabla u, \quad (4.95)$$



експонента  $p_w : Q_T \rightarrow (1, 2]$  задана правилом (4.7), а матриця  $D_w(t, x)$  визначена в (4.28). Щодо керування  $v \in \mathcal{V}_{ad}$ , то вважатимемо, що клас допустимих керувань  $\mathcal{V}_{ad}$  задається як

$$\mathcal{V}_{ad} = \{v \in L^2(Q_T) : v_a(x) \leq v(t, x) \leq v_b(x), \text{ м.с. в } Q_T\}. \quad (4.96)$$

Виходячи з означення 4.3.1, будемо казати, що при заданих  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  та  $v \in \mathcal{V}_{ad}$ , функція  $u$  є слабким розв'язком задачі (4.92)–(4.94), якщо  $u \in W_u(Q_T)$ , тобто

$$u \in L^2(Q_T), \quad u(t, \cdot) \in W^{1,1}(\Omega) \quad \text{для м.в. } t \in [0, T], \quad (4.97)$$

$$\int_{Q_T} |D_u(t, x) \nabla u|^{p_u(t, x)} dx dt < +\infty,$$

і інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left( -u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (A_u(t, x, \nabla u), \nabla \varphi) + \kappa u \varphi \right) dx dt \\ = \kappa \int_{Q_T} (f - v) \varphi dx dt + \int_{\Omega} f_0 \varphi|_{t=0} dx \end{aligned} \quad (4.98)$$

виконується для всіх  $\varphi \in \Phi$ , де  $\Phi = \{\varphi \in C^\infty(\overline{Q_T}) : \varphi|_{t=T} = 0\}$ .

Тоді теорема 4.3.2 стверджує, що при заданих  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  та  $v \in \mathcal{V}_{ad}$ , задача (4.92)–(4.94) допускає принаймні один слабкий розв'язок  $u \in W_u(Q_T)$ , який підкоряється енергетичній нерівності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} ((A_u(t, x, \nabla u), \nabla u) + \kappa u^2) dx dt \\ \leq \kappa \int_{Q_T} (f + v) u dx dt + \int_{\Omega} f_0^2 dx \end{aligned} \quad (4.99)$$

при всіх  $t \in [0, T]$ .

При цьому мають місце такі оцінки

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(Q_T)}^2 &\leq C_1^2 = \kappa T \left( \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) + \kappa^{-1} \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.100) \\ \|\nabla u\|_{L^{p_u(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)} &\leq \left( \int_{Q_T} |\nabla u|^{p_u(t, x)} dx dt + 1 \right)^{1/p^-} \leq \\ &\leq \left( \frac{d_2}{d_1^2} \left( \frac{3}{2} \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\kappa + \kappa^2 T}{2} \left( \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) \right) + 1 \right)^{1/p^-} = \end{aligned}$$

$$=: C_2, \quad (4.101)$$

$$\|\nabla u\|_{L^{p^-}(Q_T; \mathbb{R}^2)} \leq (1 + T|\Omega|)^{1/p^-} C_2, \quad (4.102)$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \sqrt{\kappa \left( \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|v\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) + \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2}. \quad (4.103)$$

Оскільки проблема існування та єдиності слабких розв'язків в сенсі розподілень для задачі (4.40)–(4.42) на сьогодні залишається відкритою, то приймемо за основу концепцію слабких розв'язків в сенсі означення 4.3.1, яке тепер з урахуванням теореми 4.3.2 звучатиме так:

**Означення 4.3.2.** Будемо казати, що слабкий розв'язок  $u \in W_u(Q_T)$  задачі (4.40)–(4.42) при заданих розподіленнях  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  та  $v \in \mathcal{V}_{ad}$ , є  $W_0$ -досяжним, якщо знайдеться послідовність  $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  що збігається до нуля при  $n \rightarrow \infty$  така, що

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{в } L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)), \\ A_{u_{n-1}}(t, x, \nabla u_n) &\rightharpoonup A_u(t, x, \nabla u) \quad \text{в } L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2) \end{aligned} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4.104)$$

де

$$\begin{aligned} u_n \in W(0, T) &= \left\{ w \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; [W^{1,2}(\Omega)]') \right\}, \\ A_w(t, x, \nabla u) &:= |D_w(t, x) \nabla u|^{p_w(t,x)-2} D_w(t, x) \nabla u, \end{aligned} \quad (4.105)$$

і при кожному  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  є слабкими розв'язками відповідних збурених задач

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon_n \Delta u - \operatorname{div} A_{u_{n-1}}(t, x, \nabla u) + \kappa u = \kappa(f - v) \quad \text{в } Q_T, \quad (4.106)$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.107)$$

$$u(0, \cdot) = f_0 \quad \text{в } \Omega. \quad (4.108)$$

**Зауваження 4.3.2.** Варто підкреслити (див. недавні результати в [1]), що тепер теорему 4.3.2 можна викласти в уточненій редакції, а саме: для заданих  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  та  $v \in \mathcal{V}_{ad}$ , початково-крайова задача (4.92)–(4.94) допускає принаймні один  $W_0$ -досяжний слабкий розв'язок

$u \in W_u(Q_T)$  для якого енергетична нерівність (4.99) виконується при всіх  $t \in [0, T]$ . Більше того, як випливає з (4.100)–(4.103), це розв’язок є обмеженим в  $L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Проте відображення  $t \mapsto \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}$  не є обов’язково неперервним. В зв’язку з цим другий доданок  $\frac{1}{2} \int_\Omega |u(T) - f_0|^2 dx$  в функціоналі вартості є погано обумовленим. Це означає, що вихідна задача оптимального керування (4.1)–(4.5) потребує певної релаксації.

#### 4.4. Постановка задачі оптимального керування та умови її розв’язаності

Як було зазначено в попередньому параграфі, оператор  $-\operatorname{div} A_u(t, x, \nabla u) + \kappa u$  є прикладом нелінійного оператора у дивергентній формі, який не є ні монотонним, ані коерцитивним. У цьому випадку (див. теорему 4.3.2) початково-крайова задача (4.2)–(4.4) допускає  $W_0$ -досяжний слабкий розв’язок, який задовольняє енергетичну нерівність (4.99). Однак невідомо, чи при кожному допустимому керуванні  $v \in \mathcal{V}_{ad}$  цей розв’язок є єдиним і чи належить він простору  $C([0, T]; L^2(\Omega))$ . Крім того, залишається відкритим питання, чи всі слабкі розв’язки (4.2)–(4.4) задовольняють енергетичну нерівність (4.99), яка відіграє вирішальну роль для отримання апріорних оцінок, таких як (4.100)–(4.103).

Основна задача даного параграфу полягає в тому, щоб дослідити наступну ослаблену версію вихідної задачі оптимального керування

$$\begin{aligned} \text{Мінімізувати } J(v, u) = \|v\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}^2 + \frac{\mu}{2\omega} \int_{T-\omega}^T \|u(t, \cdot) - f_0(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ \text{за наявності обмежень (4.2)–(4.4), (4.96),} \end{aligned} \quad (4.109)$$

де  $\omega$  є малим додатнім параметром таким, що  $T - \omega \gg 0$ , а  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  і  $v \in \mathcal{V}_{ad}$  є заданими розподіленнями.

Будемо казати, що  $(v, u)$  є допустимою парою для задачі 4.109, якщо:

$$v \in \mathcal{V}_{ad}, \quad u \in W_u(Q_T), \quad J(v, u) < +\infty,$$

$(v, u)$  пов'язані інтегральною тотожністю (4.48) та нерівністю (4.99),

а  $u$  є  $W_0$ -досяжним слабким розв'язком задачі

(4.2)–(4.4) при заданому  $v$ .

(4.110)

Нехай  $\Xi \subset L^2(Q_T) \times W_u(Q_T)$  є множиною допустимих розв'язків задачі (4.109). Тоді з теореми 4.3.2 випливає, що  $\Xi \neq \emptyset$ . Оскільки основні топологічні властивості множини  $\Xi$  невідомі, починаємо з наступного результату

**Теорема 4.4.1.** *Для заданих розподілень  $f \in L^2(Q_T)$  і  $f_0 \in L^2(\Omega)$  множина  $\Xi$  є секвенційно замкненою відносно слабкої топології простору  $L^2(Q_T) \times L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$ .*

*Доведення.* Нехай  $\{(v_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi$  є послідовністю такою, що

$$v_k \rightharpoonup v \text{ в } L^2(Q_T), \quad u_k \rightharpoonup u \text{ в } L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)). \quad (4.111)$$

Оскільки множина  $\mathcal{V}_{ad}$  опукла та замкнена, то за теоремою Mazur'а  $\mathcal{V}_{ad}$  є секвенційно замкнутою відносно слабкої топології простору  $L^2(Q_T)$ . Отже,  $v \in \mathcal{V}_{ad}$ . Тепер покажемо, що  $(v, u) \in \Xi$ . Зробимо це у декілька кроків.

**Крок 1.** Згідно з початковими припущеннями, для кожного  $k \in \mathbb{N}$  пара  $(v_k, u_k)$  задовольняє енергетичну нерівність (4.99), а  $u_k$  є  $W_0$ -досяжними слабкими розв'язками (4.2)–(4.4). Отже, з огляду на означення 4.3.2, можемо вважати, що існує послідовність  $\{u_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W(0, T)$  така, що функції  $\{u_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  є слабкими розв'язками (у сенсі розподілень) задачі (4.106)–(4.108) з  $\varepsilon_n = 1/n$  та  $v = v_k$ , і при цьому

$$u_{k,n} \rightharpoonup u_k \text{ в } L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)), \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4.112)$$

$$A_{u_{k,n-1}}(t, x, \nabla u_{k,n}) \rightharpoonup A_{u_k}(t, x, \nabla u_k) \text{ в } L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (4.113)$$

Більше того, той факт, що енергетична рівність

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{k,n}^2 dx + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{1}{n} |\nabla u_{k,n}|^2 + (A_{u_{k,n-1}}(t, x, \nabla u_{k,n}), \nabla u_{k,n}) + \kappa u_{k,n}^2 \right) dx dt = \\
& = \kappa \int_{Q_T} (f - v_k) u_{k,n} dx dt + \int_{\Omega} f_0^2 dx, \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.114)
\end{aligned}$$

є валідною при всіх  $n, k \in \mathbb{N}$ , дозволяє зробити висновок, що послідовність  $\{u_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в просторі  $L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ . Поєднуючи цей факт з (4.112) та (4.111), маємо

$$u_{k,k} \rightharpoonup u \text{ в } L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)), \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (4.115)$$

$$u_{k,k} \rightharpoonup u \text{ в } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (4.116)$$

**Крок 2.** Виходячи з енергетичної рівності (4.114) і беручи до уваги (4.100)–(4.103), приходимо до таких апріорних оцінок

$$\begin{aligned}
\|u_{k,k}\|_{L^2(Q_T)}^2 & \leq \kappa T \left( \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) + \\
& + \kappa^{-1} \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 =: S_1^2, \quad (4.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_{k,k}\|_{L^{p_{u_{k,k-1}}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)}^{p^-} & \leq \\
& \leq \frac{d_2}{d_1^2} \left( \frac{3}{2} \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2\kappa + \kappa^2 T}{2} \left( \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) \right) + \\
& + 1 =: S_2, \quad (4.118)
\end{aligned}$$

$$\|\nabla u_{k,k}\|_{L^{p^-}(Q_T; \mathbb{R}^2)} \leq (1 + T|\Omega|)^{1/p^-} S_2, \quad (4.119)$$

$$\begin{aligned}
\|u_{k,k}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} & \leq \sqrt{2} \sqrt{\kappa \left( \|f\|_{L^2(Q_T)}^2 + \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(Q_T)}^2 \right) + \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2}, \\
& \quad (4.120)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_{k,k}\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^N)} & \leq \sqrt{k} \left( \|f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \kappa \|f + v_k\|_{L^2(Q_T)} \|u_{k,k}\|_{L^2(Q_T)} \right) \leq \\
& \stackrel{(4.117)}{\leq} \sqrt{k} S_3. \quad (4.121)
\end{aligned}$$

для всіх  $k \in \mathbb{N}$ , де

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(Q_T)} \leq \sqrt{T} \|v_b\|_{L^2(\Omega)} < +\infty. \quad (4.122)$$

Покажемо, що має місце така асимптотична властивість:

$$\frac{1}{k} \nabla u_{k,k} \rightharpoonup 0 \quad \text{в } L^2(Q_T; \mathbb{R}^2). \quad (4.123)$$

Дійсно, для довільної тестової вектор-функції  $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$ , маємо

$$\left| \int_{Q_T} \left( \frac{1}{k} \nabla u_{k,k}, \varphi \right) dxdt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \int_{Q_T} \frac{1}{k} |\nabla u_{k,k}|^2 dxdt \right)^{1/2} \left( \int_{Q_T} |\varphi|^2 dxdt \right)^{1/2}.$$

Проте послідовність  $\left\{ \frac{1}{k} \nabla u_{k,k} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$  є обмеженою в  $L^2(Q_T; \mathbb{R}^2)$ . Таким чином,

$$\left| \int_{Q_T} \left( \frac{1}{k} \nabla u_{k,k}, \varphi \right) dxdt \right| \stackrel{(4.121)}{\leq} S_3 \frac{1}{\sqrt{k}} \left( \int_{Q_T} |\varphi|^2 dxdt \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

**Крок 3.** Покажемо, що потік  $\frac{1}{k} \nabla u_{k,k} + A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k})$  слабо збігається в  $L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2)$  до потоку  $A_u(t, x, \nabla u)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Для цього досить показати, що всі передумови (C1)–(C7) теореми 1.4.2 виконуються.

Для початку зауважимо, що висновок, подібний до (4.115), можна зробити і щодо послідовності  $\{u_{k,k-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Тоді за лемами 4.2.1 та 4.2.2 отримуємо

$$\begin{aligned} D_{u_{k,k-1}}(t, x) &\rightarrow D_u(t, x) \text{ і } p_{u_{k,k-1}}(t, x) \rightarrow p_u(t, x) \\ &\text{рівномірно в } \overline{Q_T} \text{ при } j \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Більше того, з (4.46) та (4.118) бачимо, що послідовність

$$\left\{ \frac{1}{k} \nabla u_{k,k} + A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

є обмеженою в  $L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2)$ . Отже знайдеться елемент  $z \in L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2)$  такий, що

$$\frac{1}{k} \nabla u_{k,k} + A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}) \rightharpoonup z \quad \text{слабо в } L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (4.125)$$

Зауважимо також, що послідовність

$$\left\{ \frac{1}{k} |\nabla u_{k,k}|^2 + (A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}), \nabla u_{k,k}) \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (4.126)$$

є обмеженою в  $L^1(Q_T)$ . Цей факт безпосередньо впливає з оцінок (4.121), (4.118) та наступного співвідношення

$$|A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k})| |\nabla \varphi| \leq \frac{1}{p'_{u_{k,k-1}}(t, x)} |A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k})|^{p'_{u_{k,k-1}}(t, x)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{p_{u_{k,k-1}}(t, x)} |\nabla \varphi|^{p_{u_{k,k-1}}(t, x)} \\
& \leq \frac{d_2^2}{2} |\nabla u_{k,k}|^{p_{u_{k,k-1}}(t, x)} + \frac{1}{p^-} |\nabla \varphi|^{p_{u_{k,k-1}}(t, x)}. \quad (4.127)
\end{aligned}$$

Поєднуючи зазначені властивості з (4.124), (4.125), (4.44), (4.115) та

$$u_{k,k} \in L^{p^+}(0, T; W^{1,p^+}(\Omega)) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{за (4.117), (4.121),}$$

і беручи до ваги оцінку  $1 < 1 + \delta = p^- < p^+ = 2 < 2p^-$ , бачимо, що всі передумови теореми 1.4.2 виконуються. Отже в силу (4.123), властивість (4.125) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \nabla u_{k,k} + A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}) \rightharpoonup A_u(t, x, \nabla u) \\
& \text{слабко в } L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2) \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (4.128)
\end{aligned}$$

**Крок 4.** На цьому кроці покажемо, що гранична пара  $(v, u)$  пов'язана інтегральною тотожністю (4.48). Спочатку зауважимо, що  $u_{k,k}$  є слабким розв'язком (у сенсі розподілу) (4.106)–(4.108) з  $n = k$ ,  $\varepsilon_n = 1/k$  і  $v = v_k$ . Отже,  $u_{k,k}$  задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_T} \left( -u_{k,k} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{k} (\nabla u_{k,k}, \nabla \varphi) + (A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}), \nabla \varphi) + \kappa u_{k,k} \varphi \right) dx dt \\
& = \kappa \int_{Q_T} (f - v_k) \varphi dx dt + \int_{\Omega} f_0 \varphi|_{t=0} dx \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad (4.129)
\end{aligned}$$

Для того, щоб встановити анонсовану тотожність досить скористатися властивостями (4.128), (4.115) і (4.111) та перейти до границі в (4.129) при  $k \rightarrow \infty$ .

**Крок 5.** Покажемо, що гранична пара  $(v, u)$  задовольняє енергетичну нерівність (4.99). Для цього потрібно перейти до границі при  $k \rightarrow \infty$  у співвідношенні

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_{k,k}^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{1}{k} |\nabla u_{k,k}|^2 + (A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}), \nabla u_{k,k}) + \kappa u_{k,k}^2 \right) dx dt \\
& = \kappa \int_{Q_T} (f - v_k) u_{k,k} dx dt + \int_{\Omega} f_0^2 dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.130)
\end{aligned}$$

що являє собою енергетичну рівність для слабких розв'язків задачі (4.106)–(4.108) з  $n = k$ ,  $\varepsilon_n = 1/k$  та  $v = v_k$ . Для цього зауважимо, що слабка збіжність в (4.115), за теоремою Соболева про вкладення, гарантує поточкову збіжність

$$u_{k,k}^2(t, \cdot) \rightarrow u^2(t, \cdot) \quad \text{м.с. в } \Omega \text{ для м.в. } t \in (0, T).$$

Отже, в силу оцінки (4.120), маємо сильну збіжність  $u_{k,k}^2(t, \cdot) \rightarrow u^2(t, \cdot)$  в  $L^1(\Omega)$  для м.в.  $t \in (0, T)$  (в силу теореми Лебега), а отже

$$\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{k,k}^2(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx \quad \text{для м.в. } t \in (0, T). \quad (4.131)$$

Крім того, враховуючи, що  $L^2(Q_T)$ -норма є напівнеперервною знизу відносно слабкої збіжності (4.116), маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} u_{k,k}^2 dx dt \geq \int_0^t \int_{\Omega} u^2 dx dt. \quad (4.132)$$

Зауважимо також, що виходячи з властивостей (4.123), (4.128) і (4.115), маємо такі збіжності

$$\nabla u_{k,k} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{та} \quad A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}) \rightharpoonup A_u(t, x, \nabla u) \quad \text{в } L^1(Q_T; \mathbb{R}^2) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Оскільки  $(A_u(t, x, \nabla u), \nabla u) \in L^1(Q_T)$  (див. (4.127)), то за лемою 1.4.4 отримуємо оцінку знизу

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{k} |\nabla u_{k,k}|^2 + (A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}), \nabla u_{k,k}) \right] dx dt &\geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{k} |\nabla u_{k,k}|^2 \right] dx dt + \\ &+ \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \int_{\Omega} (A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}), \nabla u_{k,k}) dx dt \geq \\ &\stackrel{(4.121)}{\geq} \int_0^t \int_{\Omega} (A_u(t, x, \nabla u), \nabla u) dx dt. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Отже, щоб перейти до границі в (4.130), залишається з'ясувати асимптотику виразу  $\int_{Q_T} (f - v_k) u_{k,k} dx dt$  при  $k \rightarrow \infty$ . Вивчимо це на наступному кроці, використовуючи добре відому лему Aubin-Lions'a.

**Крок 6.** Нагадаємо, що лема Aubin-Lions'a містить критерій, за яким множина функцій є компактною в  $L^p(0, T; B)$  при  $p \in [1, \infty)$ ,  $T > 0$ , де  $B$



є банаховим простором. Стандартне формулювання цієї леми звучить так: якщо  $U$  є обмеженою множиною в  $L^p(0, T; X)$  і  $\partial U / \partial t = \{\partial u / \partial t : u \in U\}$  є обмеженими в  $L^r(0, T; Y)$ ,  $r \geq 1$ , то  $U$  є відносно компактною множиною в  $L^p(0, T; B)$  за умови, що

$$X \hookrightarrow B \text{ компактно, } B \hookrightarrow Y \text{ неперервно.}$$

Поклавши  $U = \{u_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , з (4.117)–(4.120) знаходимо, що

$$\{u_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ є обмеженими в } L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega) \cap L^2(\Omega)). \quad (4.134)$$

Оскільки за теоремою Соболева про вкладення  $W^{1,p^-}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^-}(\Omega)$  компактно, то з теореми Лебега випливає, що вкладення

$$W^{1,p^-}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad L^2(\Omega) \hookrightarrow (W^{1,2}(\Omega))' \quad (4.135)$$

є також компактним. Крім того, враховуючи той факт, що для кожного  $k \in \mathbb{N}$  функції  $u_{k,k}$  є розв'язками в  $W(0, T)$  варіаційної задачі

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_{k,k}(t)}{\partial t}, \varphi \right\rangle_{(W^{1,2}(\Omega))'; W^{1,2}(\Omega)} + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{k} (\nabla u_{k,k}(t), \nabla \varphi) \right] dx \\ & + \int_{\Omega} [(A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k}(t)), \nabla \varphi) + \kappa u_{k,k}(t) \varphi] dx \\ & = \kappa \int_{\Omega} (f(t) - v_k(t)) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{м.с. в } [0, T], \end{aligned} \quad (4.136)$$

$$u_{k,k}(0) = f_0. \quad (4.137)$$

приходимо до оцінки

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{\partial u_{k,k}}{\partial t}, \varphi \right\rangle \right| & \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \|\nabla u_{k,k}\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^2)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^2)} + \\ & + 2 \|A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k})\|_{L^{p'_{u_{k,k-1}}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)} \|\nabla \varphi\|_{L^{p_{u_{k,k-1}}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)} + \\ & + \kappa \|u_{k,k}\|_{L^2(Q_T)} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)} + \kappa \|f - v_k\|_{L^2(Q_T)} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)} \leq \\ & \leq ( (4.117) - (4.121) ) \\ & \leq \left[ S_3 + \kappa S_1 + \kappa \|f\|_{L^2(Q_T)} + \kappa \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(Q_T)} \right] \|\varphi\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 1 + \int_{Q_T} |A_{u_{k,k-1}}(t, x, \nabla u_{k,k})|^{p'_{u_{k,k-1}}(t,x)} dx dt \right)^{1/2} \times \\
& \times (1 + T|\Omega|)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)} \leq \\
& \stackrel{(4.118), (4.46)}{\leq} \text{const} \|\varphi\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}, \quad \forall v \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\left\| \frac{\partial u_{k,k}}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega)))'} < +\infty. \quad (4.138)$$

Поєднуючи цей результат з (4.134) та (4.135), з леми Aubin-Lions'а випливає, що множина  $U = \{u_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  є відносно компактною в  $L^{p^-}(0, T; L^2(\Omega))$ . Отже,  $u_{k,k} \rightarrow u$  сильно в  $L^{p^-}(0, T; L^2(\Omega))$  при  $k \rightarrow \infty$ . Оскільки  $U$  є обмеженою множиною в  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ , то звідси знаходимо, що

$$u_{k,k} \rightarrow u \text{ сильно в } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (4.139)$$

Таким чином, доданок  $\int_{Q_T} (f - v_k) u_{k,k} dx dt$  є добутком сильно та слабо збіжних послідовностей в  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . Отже,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_T} (f - v_k) u_{k,k} dx dt = \int_{Q_T} (f - v) u dx dt. \quad (4.140)$$

Таким чином, з огляду на отриманий набір властивостей (див. (4.131), (4.132), (4.133) та (4.140)), граничний перехід у (4.130) при  $k \rightarrow \infty$  приводить до анонсованого співвідношення (4.99).

**Step 7.** На завершення залишається зауважити, що завдяки властивостям (4.47), які були встановлені на попередніх кроках, маємо:  $J(v, u) < +\infty$  і  $u \in W_u(Q_T)$ . Крім того, було показано, що в цьому випадку послідовність  $\{u_{k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  задовольняє всі вимоги, які зазначені у означенні 4.3.2. Отже,  $u \in W_u(Q_T) \in W_0$ -досяжним слабким розв'язком задачі (4.106)–(4.108).  $\square$

Беручи до уваги цей результат, покажемо, що вихідна задача оптимального керування (4.109) має розв'язок. Цей факт безпосередньо впливає з теореми 4.4.1 і того, що множина допустимих розв'язків  $\Xi$  обмежена в

$L^2(Q_T) \times L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$  (див. оцінки (4.100)–(4.103) та (4.122)), а цільовий функціонал  $J(v, u)$  є напівнеперервним знизу відносно слабкої топології  $L^2(Q_T) \times (L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))$ . Отже, як наслідок прямого методу варіаційного числення, можемо завершити цей висновок наступним чином:

**Теорема 4.4.2.** *Нехай  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  і  $v_a, v_b \in L^2(\Omega)$ , де  $v_a(x) \leq v_b(x)$  м.с. в  $\Omega$ , є заданими розподіленнями, і нехай  $\kappa > 0$ ,  $\sigma > 0$  і  $\varepsilon > 0$  фіксовані сталі. Тоді, при кожному  $0 < \omega < T$ , задача оптимального керування (4.109) має принаймні один розв'язок  $(v^0, u^0) \in \Xi$ .*

#### 4.5. Апроксимація розв'язків ослабленої задачі оптимального керування

Нехай  $\varepsilon$ , як зазвичай, є малим параметром, який може міняти свої значення в межах строго спадної послідовності додатних чисел, які прямують до 0. Щоб з'ясувати, чи можна досягти з певною точністю деякі оптимальні пари для вихідної задачі оптимального керування (4.109), скористаємося ключовими ідеями, що походять із теорії збурень та варіаційної збіжності задач умовної мінімізації [27, 45, 50]. Для цього розглянемо наступне сімейство збурених задач оптимального керування

$$\text{Мінімізувати } J_\varepsilon(v, u) \text{ на множині } (v, u) \in \Xi_\varepsilon, \quad (4.141)$$

де

$$J_\varepsilon(v, u) = \|v\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}^2 + \frac{\mu}{2\omega} \int_{T-\omega}^T \int_{\Omega} |u(t, x) - f_0(x)|^2 dx dt \quad (4.142)$$

а  $\Xi_\varepsilon \subset L^2(0, T; L^1(\Omega)) \times L^2(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$  є множиною допустимих розв'язків, яку означимо за правилом:  $(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ , якщо

$$\left\{ \begin{array}{l} v_\varepsilon \in \mathcal{V}_{ad}, \quad u_\varepsilon \in W_{u_\varepsilon}(Q_T), \quad J_\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon) < +\infty, \\ u_\varepsilon \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \in W_0\text{-досяжним} \\ \text{слабким розв'язком задачі (4.106)–(4.108) при заданому } v_\varepsilon. \end{array} \right\} \quad (4.143)$$

Беручи до уваги теореми 4.3.1 і 4.4.2, можна за аналогією встановити такий результат:

**Теорема 4.5.1.** *Нехай  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  та  $v_a, v_b \in L^2(\Omega)$ , де  $v_a(x) \leq v_b(x)$  м.с. в  $\Omega$ , є заданими розподіленнями, і нехай  $\kappa > 0$  є фіксованою величиною. Тоді при кожному  $\varepsilon > 0$  та  $0 < \omega < T$ , існує принаймні один розв'язок  $(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)$  задачі оптимального керування (4.141).*

Основна мета цього параграфу — показати, що ослаблена задача оптимального керування (4.109) може бути успішно апроксимована задачами (4.141). Це означає, що існує така пара  $(v^0, u^0) \in \Xi$ , що

$$\begin{aligned} J(v^0, u^0) &= \inf_{(v,u) \in \Xi} J(v, u), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(v,u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(v, u) = J(v^0, u^0), \\ (v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) &\rightarrow (v^0, u^0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ в певній топології.} \end{aligned}$$

Розпочнемо з допоміжних технічних результатів.

**Лема 4.5.1.** *Нехай  $f \in L^2(Q_T)$  та  $f_0 \in L^2(\Omega)$  є заданими розподіленнями. Нехай  $\{(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  є послідовністю допустимих пар  $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$ , яка є обмеженою в  $L^2(Q_T)$ . Тоді знайдеться стала  $C > 0$  така, що*

$$\sup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p(Q_T;\mathbb{R}^2)} \right] \leq C. \quad (4.144)$$

*Доведення.* З того, що  $\{(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  є сукупністю допустимих пар для відповідних задач керування (4.141), випливає (див. теорему 4.3.1 та наслідок 4.3.2), що при кожному  $\varepsilon > 0$  вони пов'язані між собою інтегральною тотожністю

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left( -u_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon (\nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi) + (A_{u_\varepsilon}(t, x, \nabla u_\varepsilon), \nabla \varphi) + \kappa u_\varepsilon \varphi \right) dx dt \\ = \kappa \int_{Q_T} (f - v_\varepsilon) \varphi dx dt + \int_{\Omega} f_0 \varphi|_{t=0} dx \quad \forall \varphi \in \Phi. \end{aligned} \quad (4.145)$$

і задовольняють енергетичну рівність

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left( \varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + (A_{u_\varepsilon}(t, x, \nabla u_\varepsilon), \nabla u_\varepsilon) + \kappa u_\varepsilon^2 \right) dx ds$$

$$= \kappa \int_0^t \int_{\Omega} (f - v_{\varepsilon}) u_{\varepsilon} dx ds + \int_{\Omega} f_0^2 dx \quad \text{для м.в. } t \in [0, T]. \quad (4.146)$$

Тоді за аналогією з доведенням теореми 4.3.2, а також з (4.146) знаходимо, що

$$\left. \begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))} &\leq \sqrt{2\kappa} C_1, \\ \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla u_{\varepsilon}\|_{L^{p^-}(Q_T; \mathbb{R}^2)} &\leq (1 + T|\Omega|)^{1/p^-} (\Lambda^{-1} \kappa C_1^2 + 5)^{1/p^-}, \\ \sup_{\varepsilon > 0} \|\nabla u_{\varepsilon}\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^2)} &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \kappa}} C_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.147)$$

де  $C_1 = \|f\|_{L^2(Q_T)} + \frac{2}{\kappa} \|f_0\|_{L^2(\Omega)} + \sup_{\varepsilon > 0} \|v_{\varepsilon}\|_{L^2(Q_T)}$ . Тим самим приходимо до анонсованої оцінки (4.144).  $\square$

Беручи до уваги цей результат і залучаючи аргументи з доведення теореми 4.4.1, можна показати, що слабка  $L^2(Q_T)$ -компактність допустимих керувань для збурених задач оптимального керування (4.141) дозволяє встановити деякі властивості компактності для відповідної послідовності допустимих розв'язків.

**Лема 4.5.2.** *Нехай  $\{(v_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) \in \Xi_{\varepsilon}\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  є послідовністю допустимих пар для задач оптимального керування (4.141). Припустимо, що  $v_{\varepsilon} \rightharpoonup v$  в  $L^2(Q_T)$ . Тоді при заданих  $f \in L^2(Q_T)$  та  $f_0 \in L^2(\Omega)$ , маємо:*

$$u_{\varepsilon} \rightarrow u \quad \text{сильно в } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (4.148)$$

$$u_{\varepsilon} \rightharpoonup u \quad \text{слабко в } L^{p^-}(0, T; W^{1, p^-}(\Omega)), \quad (4.149)$$

$$\varepsilon \nabla u_{\varepsilon} \rightharpoonup 0 \quad \text{слабко в } L^2(Q_T; \mathbb{R}^2), \quad (4.150)$$

$$p_{u_{\varepsilon}}(t, x) \rightarrow p_u(t, x) \quad \text{рівномірно в } \overline{Q_T}, \quad (4.151)$$

$$\varepsilon \nabla u_{\varepsilon} + A_{u_{\varepsilon}}(t, x, \nabla u_{\varepsilon}) \rightharpoonup A_u(t, x, \nabla u) \quad \text{слабко в } L^{(p^+)'}(Q_T; \mathbb{R}^2), \quad (4.152)$$

де  $(v, u) \in \Xi$ .

*Доведення.* Оскільки для кожного  $\varepsilon > 0$  функція  $u_{\varepsilon} \in W_0$ -досяжним слабким розв'язком задачі (4.106)–(4.108) при  $v = v_{\varepsilon}$ , то звідси випливає, що можна скористатися апіорними оцінками (4.84)–(4.88). Отже, існування елемента  $u$  з властивостями (4.149)–(4.152) випливає з теореми 4.3.2. Щоб

встановити той факт, що пара  $(v, u)$  є допустимою для ослабленої задачі керування (4.109), можемо застосувати аргументи доведення теореми 4.4.1. Залишається зауважити, що для доведення властивості сильної збіжності (4.148) достатньо взяти до уваги обмеженість послідовності  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  в  $L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$  (див. (4.149)) та оцінку

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \varphi \right\rangle \right| &\leq \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^2)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(Q_T; \mathbb{R}^2)} + \\
&+ 2 \|A_{u_\varepsilon}(t, x, \nabla u_\varepsilon)\|_{L^{p'_{u_\varepsilon}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)} \|\nabla \varphi\|_{L^{p_{u_\varepsilon}(\cdot)}(Q_T; \mathbb{R}^2)} + \\
&+ \kappa \|u_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)} + \kappa \|f - v_\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)} \leq \\
&\leq (\text{див. (4.147)}) \\
&\leq \left[ \text{const} + \kappa \|f\|_{L^2(Q_T)} + \kappa \sup_{k \in \mathbb{N}} \|v_k\|_{L^2(Q_T)} \right] \|\varphi\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))} + \\
&+ \left( 1 + \int_{Q_T} |A_{u_\varepsilon}(t, x, \nabla u_\varepsilon)|^{p'_{u_\varepsilon}(t, x)} dx dt \right)^{1/2} \times \\
&\times (1 + T|\Omega|)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(Q_T)} \leq \\
&\leq \text{const} \|\varphi\|_{L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))}, \quad \forall \varphi \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)).
\end{aligned}$$

Тоді (4.148) є наслідком леми Aubin-Lions'a.  $\square$

Основне питання, яке ми збираємося обговорити далі, це збіжність мінімумів в (4.141) до мінімального значення в (4.109) за умови, що  $\varepsilon$  прямує до нуля. Іншими словами, мета полягає в тому, щоб показати, що деякі оптимальні розв'язки задачі (4.109) можуть бути апроксимовані розв'язками задач (4.141). Для цього скористаємося базовими результатами теорії варіаційної збіжності задач умовної мінімізації [43, 50, 51]. Розпочнемо з деяких попередніх результатів.

**Лема 4.5.3.** *Нехай  $\{(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  є послідовністю допустимих пар таких, що  $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0}$  є обмеженими в  $L^2(Q_T)$ . Тоді знайдеться функція  $u \in W_u(Q_T)$  з властивостями (4.148)–(4.152) така, що*

$$(v, u) \in \Xi \quad i \quad J(v, u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon). \quad (4.153)$$

*Доведення.* Дане твердження безпосередньо випливає з леми 4.5.2 та властивості напівнеперервності знизу  $L^2(Q_T)$ - та  $L^2(0, T; L^1(\Omega))$ -норм відносно слабкої збіжності  $L^2(Q_T) \times L^{p^-}(0, T; W^{1,p^-}(\Omega))$ . А саме, результаті маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}^2 \geq \|v\|_{L^2(0,T;L^1(\Omega))}^2,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T-\omega}^T \|u_\varepsilon(t, \cdot) - f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_{T-\omega}^T \|u(t, \cdot) - f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

□

Перш ніж продовжити далі, зауважимо, що початково-крайова задача (4.106)–(4.108) може не мати єдиного розв’язку при фіксованому керуванні (див. теорему 4.3.1). З огляду на це ми визначимо бінарне відношення  $\langle L; \Xi_\varepsilon \rangle$  на кожній із множин  $\Xi_\varepsilon$  за правилом:  $(v_\varepsilon, u_\varepsilon) L (\widehat{v}_\varepsilon, \widehat{u}_\varepsilon)$  тоді і тільки тоді, коли  $v_\varepsilon = \widehat{v}_\varepsilon$  м.с. в  $Q_T$ . Легко бачити, що  $\langle L; \Xi_\varepsilon \rangle$  є відношенням еквівалентності. Отже, надалі не будемо розрізняти пари, що належать до одного класу еквівалентності.

**Лема 4.5.4.** *Для кожного класу еквівалентності  $\Xi/L(v)$  з  $v \in \mathcal{V}_{ad}$  знайдеться пара  $(v, u) \in \Xi/L(v)$  і послідовність  $\{(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  з властивостями (4.148)–(4.152) такі, що*

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ в } L^2(Q_T), \quad i \quad J(v, u) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon, u_\varepsilon). \quad (4.154)$$

*Доведення.* Нехай  $v^* \in \mathcal{V}_{ad}$  — довільне допустиме керування. Нехай

$$\Xi/L(v^*) = \{(v^*, u) \in \Xi\}$$

є відповідним класом еквівалентності.

Визначимо послідовність пар  $\{(v_\varepsilon, u_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  наступним чином:  $v_\varepsilon \equiv v^*$  при кожному  $\varepsilon > 0$ , а  $u_\varepsilon$  є слабким розв’язком задачі (4.106)–(4.108) з  $v = v^*$  в сенсі означення 4.3.1. Тоді, залучаючи аргументи з доведення леми 4.5.3 та теорем 4.3.1 і 4.3.2, можна показати, що існує  $W_0$ -досяжний розв’язок  $u^* \in W_{u^*}(Q_T)$  задачі (4.106)–(4.108) такий, що  $(v^*, u^*) \in \Xi$  і

$u_\varepsilon \rightarrow u^*$  сильно в  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  (див. властивості (4.148)–(4.152)). Отже  $(v^*, u^*) \in \Xi/L$  і виконуються такі співвідношення

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^1(\Omega))}^2 &= \|v^*\|_{L^2(0, T; L^1(\Omega))}^2, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T-\omega}^T \|u_\varepsilon(t, \cdot) - f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 dt &= \int_{T-\omega}^T \|u^*(t, \cdot) - f_0\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Звідси приходимо до виконання властивостей (4.154).  $\square$

Перейдемо до доведення основного результату даного параграфу.

**Теорема 4.5.2.** *Нехай  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $f_0 \in L^2(\Omega)$  та  $v_a, v_b \in L^2(\Omega)$  є заданими розподіленнями. Нехай  $\{(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  є послідовністю оптимальних пар для відповідних задач керування (4.141). Тоді знайдеться пара  $(v^0, u^0) \in \Xi$  така, що з точністю до підпослідовності  $(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \rightarrow (v^0, u^0)$  в сенсі (4.148)–(4.152) і при цьому*

$$\inf_{(v, u) \in \Xi_\varepsilon} J(v, u) = J(v^0, u^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(v, u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(v, u). \quad (4.155)$$

*Доведення.* Нехай  $\{(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  — задана послідовність оптимальних пар для задач (4.141). Виходячи з означення множини допустимих керувань  $\mathcal{V}_{ad}$  та апіорних оцінок (4.84)–(4.88), можна показати, що послідовність  $\{(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$  є компактною відносно збіжності (4.148)–(4.152). Отже, можемо вважати, що існує підпослідовність  $\{(v_{\varepsilon_k}^0, u_{\varepsilon_k}^0) \in \Xi_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  послідовності оптимальних розв’язків і пара  $(v^*, u^*)$  такі, що  $(v_{\varepsilon_k}^0, u_{\varepsilon_k}^0) \rightarrow (v^*, u^*)$  при  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  у сенсі (4.148)–(4.152). Тоді з леми 4.5.2 випливає, що  $(v^*, u^*) \in \Xi$  і

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \min_{(v, u) \in \Xi_{\varepsilon_k}} J_{\varepsilon_k}(v, u) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(v_{\varepsilon_k}^0, u_{\varepsilon_k}^0) \\ &\geq J(v^*, u^*) \geq \min_{(v, u) \in \Xi} J(v, u) = J(v^0, u^0), \end{aligned} \quad (4.156)$$

де  $(v^0, u^0)$  оптимальною парою для (4.141).

Нехай  $\Xi/L(v^0) = \{(v^0, u) \in \Xi\}$  є відповідним класом еквівалентності. Зрозуміло, що  $(v^0, u^0) \in \Xi/L(v^0)$ . Оскільки  $u^0$  є  $W_0$ -досяжним слабким розв’язком задачі (4.106)–(4.108) при  $v = v^0$  (фактично,  $(v^0, u^0)$  є границею



мінімізаційної послідовності), з леми 4.5.4 випливає, що існує послідовність  $\{(v^0, \widehat{u}_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  з властивостями (4.148)–(4.152) така, що

$$J(v^0, u^0) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v^0, \widehat{u}_\varepsilon).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \min_{(v,u) \in \Xi} J(v, u) &= J(v^0, u^0) \\ &\geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v^0, \widehat{u}_\varepsilon) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{(v,u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(v, u) \\ &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \min_{(v,u) \in \Xi_{\varepsilon_k}} J_{\varepsilon_k}(v, u) = \limsup_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(v_{\varepsilon_k}^0, u_{\varepsilon_k}^0). \end{aligned} \quad (4.157)$$

Звідси та з (4.156) отримуємо

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(v_{\varepsilon_k}^0, u_{\varepsilon_k}^0) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}(v_{\varepsilon_k}^0, u_{\varepsilon_k}^0).$$

Поєднуючи тепер (4.156) та (4.157), знаходимо

$$J(v^*, u^*) = J(v^0, u^0) = \min_{(v,u) \in \Xi} J(v, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \min_{(v,u) \in \Xi_{\varepsilon_k}} J_{\varepsilon_k}(v, u). \quad (4.158)$$

Виходячи з цих співвідношень та того факту, що задача (4.144) має не порожню множину розв'язків, можемо вважати, що  $v^* = v^0$  і  $u^*$  разом із  $u^0$  належать до одного класу еквівалентності  $\Xi/L(v^0)$ . Оскільки рівність (4.158) виконується для усіх підпослідовностей  $\{(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\}_{\varepsilon>0}$ , то звідси випливає, що ці межі співпадають, а тому  $(v^0, u^0)$  є границею для всієї послідовності  $\{(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0)\}_{\varepsilon>0}$ . Отже, залучаючи аналогічні аргументи, але вже для усієї послідовності мінімізанти, отримуємо

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{(v,u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(v, u) &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0) \geq J(v^0, u^0) = \min_{(v,u) \in \Xi} J(v, u) \\ &\geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v^0, \widehat{u}_\varepsilon) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \min_{(v,u) \in \Xi_\varepsilon} J_\varepsilon(v, u) \\ &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon(v_\varepsilon^0, u_\varepsilon^0), \end{aligned}$$

що і доводить теорему. □

## Висновки до розділу 4

У цьому розділі для відновлення цифрових зображень, які пошкоджені аддитивним та імпульсним шумом запропоновано нову модель у формі задачі оптимального керування на класі розріджених керувань для квазі-лінійного параболічного рівняння зі змінним порядком нелінійності. Характерною ознакою запропонованої задачі оптимального керування є те, що змінний показник нелінійності  $p(t, x)$ , а також тензор анізотропної дифузії  $D(t, x)$  не є визначеними апріорі, натомість ці характеристики нелокально залежать від розв'язку початково-крайової задачі. Окрім цього, в якості класу допустимих керувань обрано клас абсолютно інтегровних функцій з компактними носіями. Основними результатами даного розділу є:

1. Для початково-крайової задачі Коші-Неймана для квазілінійного параболічного рівняння з нелокальним  $p[u]$ -лапласіаном введено поняття  $W_0$ -досяжних слабких розв'язків та отримано достатні умови їх існування.
2. Показано, що за зроблених припущень, вихідна задача оптимального керування є погано обумовленою і вона потребує певної релаксації.
3. Наведено варіант для релаксації вихідної задачі та показано, що в цьому випадку множина оптимальних розв'язків не є порожньою.
4. Запропоновано схему апроксимації для релаксованої задачі оптимального керування та показано, що оптимальні пари для такої задачі можна наблизити розв'язками апроксимаційних задач.

## ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена задачам оптимального керування для класу нелінійних вироджених еліптичних та параболічних рівнянь, а також для квазі-лінійних параболічних рівнянь зі змінним показником нелінійності. Основна увага приділяється питанням розв'язаності таких задач та методам апроксимації їх розв'язків.

Головними результатами роботи є:

1. Отримано достатні умови розв'язаності одного класу задач оптимального керування для стаціонарного рівняння Перона-Маліка з крайовими умовами Неймана на межі області.
2. Запропонована схема апроксимації задачі оптимального керування для стаціонарного рівняння Перона-Маліка, яка ґрунтується на залученні параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного еліптичного оператора. А також показано, що кожна з апроксимаційних задач має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, що утворена такими розв'язками, є компактною у відповідній топології а кожна її кластерна точка є оптимальною парою для вихідної задачі.
3. Отримано необхідні умови оптимальності для апроксимаційних задач та проведено їх строге обґрунтування.
4. Отримано достатні умови розв'язаності задачі оптимального керування для еволюційного рівняння Перона-Маліка та запропонована схема її апроксимації, яка ґрунтується на залученні параметризованих оптимізаційних задач з фіктивними керуваннями в коефіцієнтах головного оператора. Доведено, що кожна з апроксимаційних задач має непорожню множину розв'язків, а будь-яка послідовність, яка утворена такими розв'язками, є компактною у відповідній топології і кожна її кластерна точка є оптимальною парою для вихідної задачі.

5. З метою відновлення цифрових зображень, які пошкоджені аддитивним та імпульсним шумом, запропоновано нову модель у формі задачі оптимального керування на класі розріджених керувань для квазілінійного параболічного рівняння зі змінним порядком нелінійності та виродженим тензором анізотропної дифузії, які нелокально залежать від розв'язку початково-крайової задачі.
6. Для початково-крайової задачі Коші-Неймана для квазілінійного параболічного рівняння з нелокальним  $p[u]$ -лапласіаном введено поняття  $W_0$ -досяжних слабких розв'язків та отримано достатні умови їх існування.
7. Наведено варіант для релаксації задачі відновлення цифрових зображень, отримано достатні умови її розв'язаності, та запропоновано схему її апроксимації для релаксованої задачі оптимального керування і показано, що оптимальні пари для такої задачі можна наблизити розв'язками відповідних апроксимаційних задач.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. L. Afraites, A. Atlas, F. Karami, D. Meskine. Some class of parabolic systems applied to image processing. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, **21**, №6, 1671–1687, 2016.
2. L. Afraites, A. Hadri, Laghrib. A denoising model adapted for impulse and gaussian noises using a constrained-pde. *Inverse Problems*, **2**, №Id:025006, 2020.
3. L. Afraites, A. Hadri, A. Laghrib, M. Nachaoui. A non-convex denoising model for impulse and gaussian noise mixture removing using bi-level parameter identification. *Inverse Problems and Imaging*, **16**, №4, 827–870, 2022.
4. Yu.A. Alkhutov, V.V. Zhikov. Existence theorems for solutions of parabolic equations with variable order of nonlinearity. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **270**, 15–26, 2010.
5. Yu.A. Alkhutov, V.V. Zhikov. Existence and uniqueness theorems for solutions of parabolic equations with a variable nonlinearity exponent. *Sbornik : Mathematics*, **205**, №3, 307–318, 2014.
6. L. Alvarez, P.-L. Lions, J.-M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**, 845–866, 1992.
7. L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford University Press, 2000.
8. B. Andreianov, M. Bendahmane, S. Ouaro. *Structural stability for nonlinear elliptic problems of the  $p(x)$ - and  $p(u)$ -laplacian kind*. HAL Id: hal-00363284, 2009.
9. S. Antontsev, S. Shmarev. *Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up*, volume 4 of *Atlantis Studies in Differential Equations*. Atlantis Press, 2013.
10. S. Antontsev, S. Shmarev. On a class of nonlocal evolution equations with the  $p[u(x, t)]$ -laplace operator. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **9**, №Id 103165, 1–23, 2020.
11. S. Antontsev, V. Zhikov. Higher integrability for parabolic equations of

- $p(x, t)$ -laplacian type. *Advances in Differential Equations*, **10**, №9, 1053–1080, 2005.
12. H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille. *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces: Applications to PDEs and Optimization*. Philadelphia: SIAM, 2006.
  13. T. Barbu, G. Marinoschi. Image denoising by a nonlinear control technique. *Int. Journal of Control*, **90**, №5, 1005–1017, 2017.
  14. P. Blomgren, T.F. Chan, P. Mulet, C. Wong. Total variation image restoration: Numerical methods and extensions. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. Ivano-Frankivsk, Ukraine May 12-15, III, IEEE*, 384–387, 1997.
  15. L. Boccardo, T. Gallouet. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *J. Funct. Analysis*, **87**, 149–169, 1989.
  16. L. Boccardo, F. Murat. Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **19**, №6, 581–597, 1992.
  17. M. Bokalo. Initial-boundary value problems for anisotropic parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains with conditions at infinity. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*, **30**, №1, 98–121, 2022.
  18. G. Buttazzo, P. Kogut. Weak optimal controls in coefficients for linear elliptic problems. *Revista Matematica Complutense*, **24**, 83–94, 2011.
  19. E. Casas. Optimal control in the coefficients of elliptic equations with state constraints. *Appl. Math. Optim.*, **26**, 21–37, 1992.
  20. E. Casas, P. Kogut, G. Leugering. Approximation of optimal control problems in the coefficient for the  $p$ -laplace equation. i. convergence result. *SIAM J. Control Optim.*, **54**, №3, 1406–1422, 2016.
  21. F. Catté, P.L. Lions, J-M. Morel, T. Coll. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29**, №1, 182–193, 1992.

22. Y. Chen, S. Levine, M. Rao. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. of Appl. Math.*, **66**, №4, 1383–1406, 2006.
23. D.V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza. *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Birkhäuser, New York, 2013.
24. C. D’Apice, U. De Maio, O. Kogut. On shape stability of dirichlet optimal control problems in coefficients for nonlinear elliptic equations. *Advances in Differential Equations*, **15**, №7–8, 689–720, 2010.
25. C. D’Apice, U. De Maio, O. Kogut. Optimal control problems in coefficients for degenerate equations of monotone type: Shape stability and attainability problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **50**, №3, 1174–1199, 2012.
26. C. D’Apice, U. De Maio, P. Kogut. An indirect approach to the existence of quasi-optimal controls in coefficients for multi-dimensional thermistor problem. In V. Sadovnichiy, M. Zgurovsky, editors, *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics*, 489–522. Springer, Chapter 24, 2020.
27. C. D’Apice, U. De Maio, P.I. Kogut. Gap phenomenon in homogenization of parabolic optimal control problems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information, Cambridge University*, **25**, 461–480, 2008.
28. C. D’Apice, U. De Maio, P.I. Kogut. Suboptimal boundary control for elliptic equations in critically perforated domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire*, **25**, 1073–1101, 2008.
29. C. D’Apice, P.I. Kogut, R. Manzo. On coupled two-level variational problem in sobolev-orlicz space. *Differential and Integral Equations*, **36**, №7-8, 621–660, 2023.
30. R. Dautray, J.L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Springer-Verlag, 1985.
31. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžičk. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Springer, New York, 2011.
32. L. Evans, M. Portilheiro. Irreversibility and hysteresis for a forward-

- backward diffusion equation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **14**, №11, 1599–1620, 2004.
33. G. Gilboa, S. Osher. Nonlocal operators with applications to image processings. *Multiscale Modeling & Simulation*, **7**, №3, 1005–1028, 2008.
  34. P. Guidotti. Anisotropic diffusions of image processing from perona–malik on. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **67**, 131–156, 2015.
  35. T. Horsin, P. Kogut. Optimal  $l^2$ -control problem in coefficients for a linear elliptic equation. *Mathematical Control and Related Fields*, **5**, №1, 73–96, 2015.
  36. T. Horsin, P. Kogut. On unbounded optimal controls in coefficients for ill-posed elliptic dirichlet boundary value problems. *Asymptotic Analysis*, **98**, 155–188, 2016.
  37. X. Ji, D. Zhang, Zh. Guo, B. Wu. Image denoising via nonlinear hybrid diffusion. *Mathematical Problems in Engineering*, **ID 890157**, 1–20, 2013.
  38. F. Karami, L. Ziad, K. Sadik. A splitting algorithm for a novel regularization of perona-malik and application to image restoration. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, **2017**, №46, 1–9, 2017.
  39. B. Kawohl, N. Kutev. Maximum and comparison principle for one-dimensional anisotropic diffusion. *Math. Ann.*, **311**, 107–123, 1998.
  40. S. Kichenassamy. The perona-malik paradox. *SIAM J. Appl. Math.*, **57**, №5, 1328–1342, 1997.
  41. D. Kinderlehrer, G. Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Academic, New York, 1980.
  42. P. Kogut. Variational s-convergence of minimization problems. part i. definitions and basic properties. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika)*, **5**, 29–42, 1996.
  43. P. Kogut. S-convergence of the conditional optimization problems and its variational properties. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika)*, **7**, 64–79, 1997.
  44. P. Kogut. On approximation of an optimal boundary control problem for



- linear elliptic equation with unbounded coefficients. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*, **34**, №5, 2105–2133, 2014.
45. P. Kogut. On optimal and quasi-optimal controls in coefficients for multi-dimensional thermistor problem with mixed dirichlet-neumann boundary conditions. *Control and Cybernetics*, **48**, №1, 31–68, 2019.
  46. P. Kogut, Ya. Kohut. Optimal sparse control formulation for reconstruction of noise-affected images. *Axioms, Special Issue 'Stability, Approximation, Control and Application'*, **12**, №12, 1–22, 2023, (Web of Science, Q1).
  47. P. Kogut, Ya. Kohut, R. Manzo. Fictitious controls and approximation of an optimal control problem for perona-malik equation. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*, **30**, №1, 42–70, 2022, (Scopus, Q3).
  48. P. Kogut, Ya. Kohut, R. Manzo. Existence result and approximation of an optimal control problem for the perona-malik equation. *Ricerche di Matematica*, **73**, 1945–1962, 2024, (Scopus, Q3).
  49. P. Kogut, Ya. Kohut, N. Parfinovych. Solvability issues for some noncoercive and nonmonotone parabolic equations arising in the image denoising problems. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*, **30**, №2, 19–48, 2022, (Scopus, Q3).
  50. P. Kogut, O. Kuppenko. *Approximation Methods in Optimization of Nonlinear Systems*. Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 2019.
  51. P. Kogut, G. Leugering. On s-homogenization of an optimal control problem with control and state constraints. *Zeitschrift fuer Analysis und ihre Anwendungen*, **20**, 395–429, 2001.
  52. P. Kogut, G. Leugering. *Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains. Approximation and Asymptotic Analysis*. Birkhäuser Verlag, Boston, 2011.
  53. P. Kogut, G. Leugering. Optimal  $l^1$ -control in coefficients for dirichlet elliptic problems:  $w$ -optimal solutions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **150**, №2, 205–232, 2011.
  54. P. Kogut, G. Leugering. Optimal  $l^1$ -control in coefficients for dirichlet

- elliptic problems:  $h$ -optimal solutions. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, **31**, №1, 31–53, 2012.
55. P. Kogut, G. Leugering. Matrix-valued  $l^1$ -optimal control in the coefficients of linear elliptic problems. *Journal for Analysis and its Applications*, **32**, №4, 433–456, 2013.
  56. Ya. Kohut, P. Kogut, R. Manzo. Some results on optimal control problem for perona-malik equation. *Proceedings of the 20th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2022, 19–25 September 2022, Rhodes, Greece*, 73–76, 2022.
  57. Ya. Kohut, O. Kupenko. On optimal control problem for the perona-malik equation and its approximation. *Mathematical Control and Related Fields*, **13**, №4, 1466–1483, 2023, (Scopus, Q2).
  58. Ya. Kohut, N.V. Parfinovych. On an optimal control problem for the perona-malik equation. *The International Conference 'Current trends in abstract and applied analysis'. Ivano-Frankivsk, Ukraine May 12-15*, 40, 2022.
  59. Ya. Kohut, N.V. Parfinovych. On optimal sparse control problem for quasi-linear parabolic equation with variable order of nonlinearity. *The First All-Ukrainian scientific and practical conference with international participation 'Modern problems of mathematics: applied aspect', Zhytomyr, May 30, 2024*, 40–42, 2024.
  60. O.A. Ladyshenskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva. *Linear and Quasi linear Equation of Parabolic Type*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968.
  61. S. Lecheheb, M. Maouni, H. Lakhal. Image restoration using a novel model combining the perona-malik equation and the heat equation. *International Journal of Analysis and Applications*, **19**, №2, 228–238, 2021.
  62. K.S.C. Lellmann, J. Papafitsoros, D. Spector. Analysis and application of a nonlocal hessian. *Journal on Imaging Sciences*, **8**, №4, 2161–2202, 2015.
  63. J. Leray, J.-L. Lions. Quelques résultats de visik sw les problèmes elliptiques

- non linéaires par les méthodes de minty-browder. *Bull. Sot. Math. Fr.*, **93**, 97–107, 1965.
64. J.L. Lions. *Contrôlabilité exacte. Perturbations et stabilisation de systèmes distribués*. Masson, Paris, 1988.
  65. G. Marinoschi. *Dual Variational Approach to Nonlinear Diffusion Equations*. Birkhäuser, Switzerland, 2023.
  66. F. Murat. Un contre-exemple pour le probleme du controle dans les coefficients. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **273**, Ser. A-B, **273**, A708–A711, 1971.
  67. F. Murat. Compacité par compensation. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa.*, **5**, N°4, 489–507, 1978.
  68. L. Nirenberg. On elliptic partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **13**, 116–162, 1959.
  69. L. Nirenberg. *Topics in Nonlinear Analysis*. New York University, 1974.
  70. S. Ouaro, N. Sawadogo. Structural stability of nonlinear elliptic  $p(u)$ -laplacian problem with robin type boundary condition. In *Studies in Evolution Equations and Related Topics. STEAM-H: Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics & Health*, volume 2021, 69–111. Springer, Cham, 2021.
  71. P. Perona, J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, **12**, 161–192, 1990.
  72. T. Roubíček. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Birkhäuser, Basel, 2013.
  73. T. Roubíček. *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus*. De Gruyter, 2013.
  74. V. Rădulescu, D. Repovš. *Partial differential equations with variable exponents: variational methods and qualitative analysis*. CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2015.
  75. R.E. Showalter. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. vol. 49 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

76. J. Simon. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ . *Ann. Mat. pura Appl.*, **146**, 65–96, 1987.
77. V.B. Surya Prasath, J.M. Urbano, D. Vorotnikov. Analysis of adaptive forward-backward diffusion flows with applications in image processing. *Inverse Problems*, **31**, №Id 105008, 1–30, 2015.
78. L. Tartar. Problèmes de contrôle des coefficients dans des équations aux dérivées partielles. In *Control theory, numerical methods and computer systems modelling Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, no. 107, 291–340. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
79. L. Tartar. *Cours Peccot*. Collège de France, 1977.
80. J. Weickert, B. Benhamouda. A semidiscrete nonlinear scale-space theory and its relation to the perona-malik paradox. In *Theoretical Foundations of Computer Vision. Advances in Computing Science*, 1–10. Springer, Vienna, 1997.
81. V.V. Zhikov. Solvability of the three-dimensional thermistor problem. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **281**, 98–111, 2008.
82. V.V. Zhikov. On the weak convergence of fluxes to a flux. *Doklady Mathematics*, **81**, №1, 58–62, 2010.
83. V.V. Zhikov. On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions. *Journal of Mathematical Sciences*, **173**, №5, 463–570, 2011.
84. V.V. Zhikov, S.E. Pastukhova. Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **270**, 104–131, 2010.

## ДОДАТОК А

### Список публікацій здобувача:

1. P. Kogut, Ya. Kohut, N. Parfinovych. Solvability issues for some noncoercive and nonmonotone parabolic equations arising in the image denoising problems. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*, **30**, №2, 19–48, 2022, (Scopus, Q3).
2. Ya. Kohut, O. Kuppenko. On optimal control problem for the perona-malik equation and its approximation. *Mathematical Control and Related Fields*, **13**, №4, 1466–1483, 2023, (Scopus, Q2).
3. P. Kogut, Ya. Kohut, R. Manzo. Existence result and approximation of an optimal control problem for the perona-malik equation. *Ricerche di Matematica*, **73**, 1945–1962, 2024, (Scopus, Q3).
4. P. Kogut, Ya. Kohut, R. Manzo. Fictitious controls and approximation of an optimal control problem for perona-malik equation. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*, **30**, №1, 42–70, 2022, (Scopus, Q3).
5. P. Kogut, Ya. Kohut. Optimal sparse control formulation for reconstruction of noise-affected images. *Axioms, Special Issue 'Stability, Approximation, Control and Application'*, **12**, №12, 1–22, 2023, (Web of Science, Q1).
6. Ya. Kohut, N.V. Parfinovych. On an optimal control problem for the perona-malik equation. *The International Conference 'Current trends in abstract and applied analysis'. Ivano-Frankivsk, Ukraine May 12-15*, page 40, 2022.
7. Ya. Kohut, P. Kogut, R. Manzo. Some results on optimal control problem for perona-malik equation. *Proceedings of the 20th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2022, 19–25 September 2022, Rhodes, Greece*, pages 73–76, 2022.
8. Ya. Kohut, N.V. Parfinovych. On optimal sparse control problem for quasi-linear parabolic equation with variable order of nonlinearity. *The First All-Ukrainian scientific and practical conference with international participation*

*'Modern problems of mathematics: applied aspect', Zhytomyr, May 30, 2024, pages 40–42, 2024.*

9. Ya. Kohut. On optimal sparse control formulation for reconstruction of noise-affected images. *VII international scientific and practical conference "Modeling, control and information technology" November 7-9 2024, Rivne, pages 243–244, 2024.*

### **Відомості про апробацію результатів дисертації:**

За результатами дисертаційної роботи було зроблено доповіді на:

- the 20th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2022, (19–25 September 2022, Rhodes, Greece;
- International online conference "Current trends in abstract and applied analysis", (May 12-15, 2022, Ivano-Frankivsk, Ukraine);
- The First All-Ukrainian scientific and practical conference with international participation "Modern problems of mathematics: applied aspect", (Zhytomyr, May 30, 2024);
- VII International scientific and practical conference "Modeling, control and information technologies", (Rivne, October, 2024).

Результати роботи також доповідались на семінарах:

- Кафедри математичного аналізу та оптимізації Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Дніпро, неодноразово протягом 2022–2024 років, (керівник семінару: д.ф.-м.н., проф. Н. В. Парфінович);
- Department of Information Engineering, Electrical Engineering and Applied Mathematics, University of Salerno, (керівник семінару: Prof. C.D'Apice);
- Кафедри диференціальних та інтегральних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, (співкерівник семінару: д.ф.-м.н., проф. О.В. Капустян).

## ДОДАТОК Б

В цьому додатку наведено результати модельних розрахунків, які пов'язані з проблемою обезшумлення цифрових зображень. За основу було взято декілька супутникових зображень, доступ до яких було надано компанією Earth Observation System Data Analytics (EOSDA). Всі зображення містять певні ділянки агроугідь на території України. Зображення були зроблені супутниками Sentinel-1 і Sentinel-2 в 2019-2022 роках.

Для розрахунків була залучена модель оптимізаційної задачі (4.141)–(4.142), в якій було покладено  $a = 21$ ,  $T = 1$ ,  $\omega = 0.01$ ,  $\mu = 2$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 3$ ,  $h = 0.01$ ,  $\kappa = 1$ ,  $v_a(x) = 0$  і  $v_b(x) = 255$ . Розрахунки проводилися в Matlab R2021b.









