Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

2003

Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет

Кафедра обчислювальної механіки
та міцності конструкцій

ЛАБОРТОРНІЙ ПРАКТИКУМ
З ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2003

Містить матеріал, необхідний для виконання студентами лабораторних робіт з варіаційного числення. Наведені приклади розв`язання типових задач, дані варіанти індивідуальних завдань, означення та формули.

Для студентів III курсу механіко-математичного факультету спеціальності "Динаміка і міцність" та факультету прикладної математики ДНУ.

Темплан 2003, поз. 78

ЛАБОРАТОРНІЙ ПРАКТИКУМ
З ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Укладач старш. викл. Е.Л. Гарт

Редактор Н.О. Чумак
Коректор Г.О. Стара

Підписано до друку 15.05.03. Формат 60×84/16. Папір друкарський.
Друк плоский.Ум. друк. арк. 2,32. Ум. фарбо-відб. 2,32. Обл. –вид. арк. 2,82.
Тираж 100 пр. Зам. № 1262.

РВВ ДНУ, вул. Наукова, 13, м. Дніпропетровськ, 49050.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050.

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасному механіку-досліднику часто приходиться мати справу з задачами, що жадають від його гарної математичної підготовки і твердих навичок у застосуванні різноманітних математичних методів. Розширення математичного кругозору фахівців в галузі механіки чимало сприяє новим досягненням техніки.

Одним з найбільш важливих для додатків розділів класичного математичного аналізу є варіаційне числення. Ціль викладання дисципліни складається у формуванні в студентів міцних знань теоретичних основ класичного варіаційного числення, теорії першої і другої варіації, теорії поля, достатніх умов слабкого і сильного екстремумів, методів розв`язання основних варіаційних задач, а також ознайомлення з основами класичного варіаційного числення. Розроблений відповідно до лекційного курсу, що читається для студентів-механіків, лабораторний практикум, що включає в себе обговорення основних понять і розбір на прикладах найважливіших задач, покликаний сприяти підготовці студентів до самостійного розв`язання складних практичних і наукових задач в галузі варіаційного числення.

При виконанні кожної лабораторної роботи студент, крім розв`язання задач свого варіанта, повинний уміти відповісти на контрольні теоретичні питання по даній темі, перелік яких приведений наприкінці кожної лабораторної роботи.

Лабораторна робота 1

ФУНКЦІОНАЛИ. НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

І. Перша варіація функціонала. Нехай заданий деякий клас *M* функцій *y(x)*. Якщо кожній функції *y(x)єM* за деяким законом поставлено у відповідність визначене число *I*, то говорять, що в класі *M* визначений *функціонал I,* і пишуть *I=I[y(x)]*.

Клас *M* функцій *y(x),* на якому визначений функціонал *I[y(x)]* називається *областю визначення функціонала*. Іншими словами, функціонали – це функції, у яких роль незалежних змінних грають функції.
Варіацією чи збільшенням аргументу y(x) функціонала *I[y(x)]* називається *величина δy*, рівна різниці між двома функціями $\overline{y}(x)$ й *y(x)*, що належать обраному класу *M* функцій, тобто

$$\delta y = \overline{y}(x) - y(x)$$

Нехай функціонал *I[y(x)]* заданий на множині *M* функцій *y(x). Збільшенням функціонала I[y(x)],* що відповідає збільшенню *δy(x)* аргументу, називається величина

$$\Delta I = \Delta I[y(x)] = I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)],$$

де $\delta y = \overline{y}(x) - y(x);\quad \overline{y}(x), y(x) \in M$.

Якщо приріст функціонала $\Delta I = I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)]$ можна представити у виді $\Delta I = L[y(x), \delta y(x)] + \beta[y(x), \delta y] \cdot \|\delta y\|$, де $L[y(x), \delta y]$ – лінійний по відношенню до *δy* функціонал і $\beta[y(x), \delta y] \to 0$ при $\|\delta y\| \to 0$, то лінійна по відношенню до *δy* частина приросту функціонала, тобто $L[y(x), \delta y]$, називається *варіацією функціонала* і позначається *δI.*

У цьому випадку функціонал *I[y(x)]* називається *диференційовним* у точці *y(x).* Дане визначення варіації функціонала аналогічне визначенню диференціала функції в математичному аналізі. Можна також дати друге визначення варіації.

Варіацією функціонала I[y(x)] у точці *y=y(x)* називається значення похідної функціонала $I[y(x) + \alpha\delta y(x)]$ по параметру α , коли $\alpha = 0,$ тобто

$$\delta I = \frac{\partial}{\partial \alpha} I[y(x) + \alpha \delta y(x)] \Big|_{\alpha=0}.$$

Друге визначення варіації функціонала декілька ширше першого в тім змісті, що існують функціонали, з приросту яких не можна виділити головної лінійної частини, але варіація в змісті другого визначення існує.

Приклад. Обчислити збільшення і варіацію функціонала

$$I[y(x) = \int_0^1 y^2(x)dx,$$

якщо $y=2x$, $\delta y = \alpha x^2$, і порівняти δI з ΔI при $\alpha=1$.

<u>Рішення.</u> По визначенню

$$\Delta I = I[y+\delta y] - I[y] = \int_0^1 (y+\delta y)^2 dx - \int_0^1 y^2 dx = \int_0^1 [y^2 + 2y\delta y + (\delta y)^2 - y^2]dx =$$

$$= 2\int_0^1 y\delta y dx + \int_0^1 (\delta y)^2 dx.$$

Звідси $\delta I = 2\int_0^1 y\delta y dx.$ Обчислимо варіацію при конкретних значеннях y, δy і α:

$$\delta I = 2\int_0^1 2x\alpha x^2 dx = 4\alpha \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \alpha, \qquad \delta I = 1.$$

Обчислимо приріст

$$\Delta I = \delta I + \int_0^1 (\delta y)^2 dx = \alpha + \frac{\alpha^2 x^5}{5} \Big|_0^1 = \alpha + \frac{\alpha^2}{5}, \qquad \Delta I = \alpha + \frac{\alpha^2}{5} = 1{,}2.$$

Таким чином, при $\alpha = 1$ $\delta I = 1 < \Delta I = 1{,}2$.

В усіх нижченаведених варіантах обчислити варіацію функціонала.

№	Функціонал	y	δy	α
1	$I[y(x)] = \int_0^1 y^2(x) + e^y dx$	У=$2x^2$	$\delta y=\alpha x$	1
2	$I[y(x)] = \int_0^1 [y^2(x) + 5^{xy}]dx$	У=3x	$\delta y=\alpha/x$	0.1
3	$I[y(x)] = \int_0^1 [y^2(x) + 2^{xy}]dx$	У=4x	$\delta y=\alpha/x$	1
4	$I[y(x)] = \int_0^1 [y^2(x) + \ln\|xy\|]dx$	Y=-x	$\delta y=\alpha x^3$	-0.1
5	$I[y(x)] = \int_0^1 [ye^x + y^2(x)]dx$	y=-2x	$\delta y=\alpha x^4$	0.01
6	$I[y(x)] = \int_0^1 [8^{xy} + y^2(x)]dx$	y=-3x	$\delta y=\alpha/x$	-0.1

7	$I[y(x)]=\int_0^1[\arcsin xy+y^2(x)]dx$	y=-4x	δy=αx	0.1
8	$I[y(x)]=\int_{-1}^0[y^2(x)+4^{xy}]dx$	y=5x	δy=α/x	-0.01
9	$I[y(x)]=\int_{-1}^0[y^2(x)+\mathrm{ctg}xy]dx$	y=-5x	δy=α/x	1
10	$I[y(x)]=\int_{-1}^0[y^2(x)+\cos xy]dx$	y=6x	δy=αx	-0.1
11	$I[y(x)]=\int_0^1[2y^2(x)+\sin xy]dx$	y=-6x	δy=α/x	0.01
12	$I[y(x)]=\int_0^1[2y^2(x)+\mathrm{tg}xy]dx$	$y=2x^3$	δy=αx	0.1
13	$I[y(x)]=\int_0^1(2+y)^3dx$	y=-2x	$\delta y=\alpha x^3$	-0.1
14	$I[y(x)]=\int_0^1[(4+y)^2+3^y]dx$	$y=3x^2$	δy=αx	-0.01
15	$I[y(x)]=\int_0^1[(3+y)^2+\cos xy]dx$	y=-3x	δy=αx	1
16	$I[y(x)]=\int_0^1[(6+y)^2+xy]dx$	y=4x	$\delta y=\alpha x^3$	1
17	$I[y(x)]=\int_0^1[(7+y)^2+yx^3]dx$	y=-4x	$\delta y=\alpha x^2$	0.1
18	$I[y(x)]=\int_0^1(5+y)^2+e^{xy}dx$	$y=x^3$	δy=αx	-0.1
19	$I[y(x)]=\int_{-1}^0[y^2(x)+3^{xy}]dx$	y=-x	δy=α/x	0.1
20	$I[y(x)]=\int_0^1[y^2(x)+\lg\lvert xy\rvert]dx$	y=2x	$\delta y=\alpha x^4$	1
21	$I[y(x)]=\int_0^1[y^2(x)-8^y]dx$	$y=-2x^2$	δy=αx	0.01

22	$\mathbf{I[y(x)]=\int_0^1[y^2(x)+arctg y]dx}$	y=3x	δy=αx	1
23	$\mathbf{I[y(x)]=\int_0^1[y^2(x)+tg y]dx}$	y=-3x	δy=αx	-0.01
24	$I[y(x)]=\int_0^1[y^2(x)+2^y x]dx$	$y=4x^3$	δy=αx	0.01
25	$I[y(x)]=\int_0^1[y^2(x)-4^y]dx$	$y=-4x^2$	δy=αx	-0.01

II. Найпростіша задача варіаційного числення. Рівняння Эйлера.

Постановка задачі. У класі неперервно-диференційованих функцій знайти таку функцію, що доставляє функціоналу

$$I[\,y(x)] = \int_{x1}^{x2} F(x, y, \dot{y})dx \qquad (1)$$

найменше (найбільше) значення при заданих граничних умовах

$$y(x_1)=y_1, \quad y(x_2)=y_2\,. \qquad (2)$$

Ця задача відома у варіаційному численні як задача з закріпленими кінцями, тому що екстремальне значення функціонала (1) відшукується на безлічі гладких кривих, що з'єднують дві задані точки $A_1(x_1,y_1)$ і $A_2(x_2,y_2)$.

ТЕОРЕМА. Для того щоб функціонал (1), визначений на безлічі неперервно-диференційовних функцій $\bar{y}=\bar{y}(x)$, задовольняючих граничним умовам (2), досягав на даній функції $y=y(x)$ найменшого (найбільшого) значення, необхідно, щоб ця функція була інтегральною кривою диференціального рівняння Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)=0. \qquad (3)$$

<u>Приклад.</u> Знайти екстремаль функціонала

$$\int_0^1 (12xy + yy' + y'^2)dx,$$

яка задовольняє граничним умовам y(0)=1, y(1)=4.

Розв'язання.

1) Складаємо рівняння Ейлера

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0;$$

$$F(x, y, y') = 12xy + yy' + y'^2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = y + 2y'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 12x + y'; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = 1;$$

$$2y'' + y' - 12x - y' = 0.$$

2) Знаходимо сімейство екстремалей

$$y'' = 6x; y' = 3x^2 + c_1; \quad y = x^3 + c_1 x + c_2.$$

3)Визначаємо довільні сталі c_1 і c_2

$$\begin{cases} 0 + c_1 0 + c_2 = 1 \\ 1 + c_1 + c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

4) Визначаємо екстремаль

$$y^* = x^3 + 2x + 1.$$

5) Знаходимо екстремум функціонала

$$y'^* = 3x^2 + 2,$$

$$I[y^*] = \int_0^1 (12xy^* + y^* y'^* + y'^*) dx = \int_0^1 [12x^4 + 24x^2 + 12x +$$

$$+ (x^3 + 2x + 1)(3x^2 + 2) + (3x^2 + 2)^2] dx = 33{,}7.$$

В усіх нижченаведених варіантах розв`язати відповідні варіаційні задачі і відповісти на поставлені питання.

№	Функціонал	Граничні умови
1	$I[y(x)] = \int_0^1 \left(4\dot{y}^2 + y^2\right)dx$	$y(0) = 2, \quad y(1) = 2\sqrt{e}$
2	$I[y(x)] = \int_0^1 (3y^2 + \dot{y}^2 - 8x)dx$	$y(0) = 1, \quad y(1) = e^{\sqrt{3}}$
3	$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y^2 - \dot{y}^2 - 8y \cdot \mathrm{ch} x)dx$	$y(0) = 2, \; y(\pi/2) = 2 \cdot ch\frac{\pi}{2}$

4	$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y^2 + \dot{y}^2 + y\cos x)dx$	$y(0) = -\frac{1}{4}, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$
5	$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (\dot{y}^2 + 2y - y^2)dx$	$y(0) = 2, \ y(\frac{\pi}{2}) = 1$
6	$I[y(x)] = \int_0^{\pi} (y\sin x + \dot{y}^2)dx$	$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1$
7	$I[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (\dot{y}^2 - y^2)dx$	$y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}/2$
8	$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (4y^2 - \dot{y}^2 + 8y)dx$	$y(0) = -1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$
9	$I[y(x)] = \int_0^{1} (\dot{y}^2 + y^2 + 2y \cdot e^{2x})dx$	$y(0) = 1/3, \quad y(1) = e^2/3$
10	$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (4y\cos 2x + \dot{y}^2 - y^2)dx$	$y(0) = -2/3, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 2/3$
11	$I[y(x)] = \int_0^{1} \frac{\dot{y}^2}{x^3} dx$	$y(0) = 1, \ y(1) = 2$
12	$I[y(x)] = \int_0^{\pi} (\dot{y}^2 + y^2 - 2y \cdot \sin x)dx$	$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
13	$I[y(x)] = \int_0^{1} (\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + 16y^2)dx$	$y(0) = 2, \ y(1) = 2e^4$
14	$I[y(x)] = \int_{-1}^{1} (1 + x^2\dot{y})\dot{y}dx$	$y(-1) = 0, \quad y(1) = 1$
15	$I[y(x)] = \int_1^{e} (x\dot{y}^2 + y\dot{y})dx$	$y(1) = 0, \ y(e) = 1$
16	$I[y(x)] = \int_0^{2} (\dot{y}^2 + 2y\dot{y} + y^2)dx$	$y(0) = 1, \ y(2) = e^2$
17	$I[y(x)] = \int_0^{1} (y^2 + \dot{y}^2 + 2y \cdot e^x)dx$	$y(0) = 0, \ y(1) = e/2$
18	$I[y(x)] = \int_0^{1} (\dot{y}^2 + 4y^2)dx$	$y(0) = e^2, \quad y(1) = 1$
19	$I[y(x)] = \int_{-1}^{1} (-2x\dot{y} + \dot{y}^2 + 2xy)dx$	$y(-1) = 0, \ y(1) = 1$

20	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (3x\dot{y} + 2\dot{y} + \dot{y}^2)dx$	$y(-1) = 1,\ y(1) = 2$
21	$I[y(x)] = \int_{0}^{1} (16xy + y\dot{y} + 4\dot{y}^2)dx$	$y(0) = 1,\ y(1) = 4$
22	$I[y(x)] = \int_{0}^{2} (4x\dot{y} + \dot{y}^2)dx$	$y(0) = 1,\ y(2) = 1$
23	$I[y(x)] = \int_{0}^{2} (xy + \dot{y}^2)dx$	$y(0) = 2,\ y(2) = 3$
24	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (12xy - \dot{y}^2)dx$	$y(-1) = 1,\ y(0) = 2$
25	$I[y(x)] = \int_{-1}^{1} (\dot{y}^2 - 2xy)dx$	$y(-1) = -1,\ y(1) = 1$

Контрольні питання

1. Типи функціоналів, обмежень, граничних умов.
2. Дати геометричну інтерпретацію задачі з закріпленими кінцями.
3. У якому випадку варіаційна задача (1), (2) має сенс, якщо підінтегральна функція F не залежить від $\dot{y}$, тобто $F=F(x,y)$?
4. Показати, що значення функціонала (1) на екстремалях не залежить від шляху інтегрування у випадку лінійної залежності функції F від $\dot{y}$, тобто $F=M(x,y)+N(x,y)\dot{y}$.
5. Знайти сімейство экстремалей функціонала (1) у випадку залежності F лише від $\dot{y}$, тобто $F= F(\dot{y})$.
6. Показати, що у випадку незалежності функції F від y, тобто $F = F(x, \dot{y})$, рівняння Ейлера зводиться до диференціального рівняння першого порядку.
7. Показати, що твердження питання 6 справедливе у випадку $F = F(y, \dot{y})$.
8. Показати, що якщо до підінтегрального виразу в функціоналі (1) додати повний диференціал будь-якої функції $U=U(x,y)$, то рівняння Ейлера залишиться колишнім.
9. Які умови по гладкості накладаються на функцію $F = F(x, y, \dot{y})$ у варіаційній задачі (1), (2)?

Лабораторна робота 2

НЕОБХІДНІ УМОВИ УМОВНОГО ЭКСТРЕМУМУ У ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧАХ

I. Ізопериметрична задача. Нехай задані дві функції $F(x,y,y')$ і $G(x,y,y')$. Серед всіх неперервно–диференційовних на $[x_0, x_1]$ функцій $y=y(x)$, що надають функціоналу

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x,y,y')dx \tag{1}$$

заданне значення l, необхідно знайти таку функцію $y = y^*(x)$, на якій функціонал

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \tag{2}$$

приймає екстремальне значення при граничних умовах

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1. \tag{3}$$

Щодо функцій F і G передбачається, що вони мають неперервні частинні похідні першого і другого порядків при $x_0 \le x \le x_1$ і при довільних значеннях y, y'.

У відмінності від задач варіаційного числення на безумовний екстремум тут з'являється додаткове обмеження у виді

$$K[y]=l=const. \tag{4}$$

Необхідна умова екстремума в ізопериметричній задачі дається наступною теоремою.

ТЕОРЕМА (Ейлера). Для того щоб функція $y = y^*(x)$ надавала екстремум ізопериметричній задачі, необхідно, щоб існувала така константа λ, що крива $y = y^*(x)$ є екстремаллю функціонала

$$L=\int_{x_0}^{x_1} F[(x,y,y') + \lambda G(x,y,y')]dx,$$

тобто задовольняє рівнянню

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) = 0. \tag{5}$$

З рівняння (5) випливає закон взаємності ізопериметричних задач: екстремалі функціонала (2) при додатковій умові (4) збігаються з екстремалями функціонала (1) за умови

$$I[y]=l=const.$$

Ізопериметричними задачами називають також варіаційні задачі, у яких потрібно визначити екстремум функціонала, що залежить від декількох невідомих функцій

$$I[y_1,...,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}(x,y_1,y_2,...y_n,y_1',y_2',...,y_n'\ )dx \qquad (6)$$

при наявності так званих ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1}G(x,y_1,y_2,...y_n,y_1',y_2',...,y_n')dx=l_i \qquad (7)$$

$$(i = 1,2,...,m),$$

де l_i – постійні, і граничних умов

$$y_i(x_0)=y^0{}_i,\quad y_i(x_1)=y_i^{\ 1}\quad (i=\overline{1,n}). \qquad (8)$$

Для розв`язання задачі (6)-(8) треба скласти допоміжний функціонал

$$\Phi[y_1,y_2,...y_n]=\int_{x_0}^{x_1}(F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i)dx\ , \qquad (9)$$

де λ_i – деякі постійні, і записати для нього *n* рівнянь Ейлера. У підсумку одержимо замкнуту систему, що містить *(2n+m)* невідомих (*2n* – довільних постійних у розв`язкі системи рівнянь Ейлера і m значень λ) і *(2n + m)* рівнянь (*2n* граничних умов і *m* ізопериметричних умов). З цієї системи визначаємо вектор-функцію $y^*(x)=\left\langle y^*{}_1(x),y^*{}_2(x),...,y^*{}_n(x)\right\rangle$, на якій може досягатися екстремум задачі (6)-(8).

Приклад. Знайти екстремаль в ізопериметричній задачі про екстремум функціонала

$$I[y,z]=\int_0^1(y'^2+z'^2-4xz'-4z)dx,$$

$$y(0)=0,\ \ z(0)=0,\ \ y(1)=1,\ \ z(1)=1,$$

за умови

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)dx = 2\,.$$

Розв'язання. Складаємо допоміжний функціонал

$$\Phi = \int_0^1 [y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)]dx = 2$$

і виписуємо для нього систему рівнянь Ейлера

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}(2y' + 2\lambda y' - \lambda x) = 0, \\ -4 - \dfrac{d}{dx}(2z' - 4x - 2\lambda z') = 0. \end{cases}$$

Розв`язуючи цю систему одержимо :

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + 2C_1 x}{4(1+\lambda)} + C_2, \\ z(x) = \dfrac{C_3 x}{2(1-\lambda)} + C_4. \end{cases}$$

Граничні умови дають

$$C_1 = \frac{3\lambda + 4}{2},\ \ C_2 = 0,\ \ C_3 = 2(1-\lambda),\ \ C_4 = 0,$$

так що

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + (3\lambda + 4)x}{4(1+\lambda)}, \\ z(x) = x\,. \end{cases}$$

Для знаходження λ скористаємося ізопериметричною умовою. Тому що

$$y'(x) = \frac{2\lambda x + 3\lambda + 4}{4(1+\lambda)},\ z'(x) = 1,$$

то одержуємо

$$\int_0^1 [\frac{(2\lambda x + 3\lambda + 4)^2}{16(1+\lambda)^2} - \frac{(2\lambda x + 3\lambda + 4)x}{4(1+\lambda} - 1]dx = 2,$$

відкіля, після простих, але громіздких пертворень будемо мати рівняння для визначення λ :

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2+46\lambda+24)=48(\lambda^2+2\lambda+1).$$

Звідки $\lambda_1=-\dfrac{10}{11},\ \lambda_2=-\dfrac{12}{11}.$

Підстановкою λ_1 й λ_2 у ізопериметричну умову переконуємося, що λ_2 йому не задовольняє, а λ_1 задовольняє.

Таким чином, шукана екстремаль визначається рівняннями :

$$\begin{cases} y(x)=\dfrac{7x-5x^2}{2}, \\ \text{z(x)=x.} \end{cases}$$

Відповідно до номера варіанта розв`язати наступні задачі і дати їхню геометричну інтерпретацію.

Ва- ріант	Функціонал	Умови
1	$I[y(x)]=\int_0^1(\dot{y}^2(x)+e^x)dx$	y(0)=1, y(1)=5, $\int_0^1 y(x)dx$ =3
2	$I[y(x)]=\int_0^1(\dot{y}^2(x)+2^x)dx$	y(0)=2, y(1)=4, $\int_0^1 y(x)dx$ =5
3	$I[y(x)]=\int_0^1(\dot{y}^2(x)+3^x)dx$	y(0)=0, y(1)=10, $\int_0^1 y(x)dx$ =2
4	$I[y(x)]=\int_0^1(\dot{y}^2(x)+4^x)dx$	y(0)=-2, y(1)=5, $\int_0^1 y(x)dx$ =7.5
5	$I[y(x)]=\int_{-1}^0(\dot{y}^2(x)+\sin x)dx$	y(-1)=1, y(0)=6, $\int_{-1}^0 y(x)dx$ =4
6	$I[y(x)]=\int_{-1}^0(\dot{y}^2(x)+\cos x)dx$	y(-1)=-3, y(0)=1, $\int_{-1}^0 y(x)dx$ =5
7	$I[y(x)]=\int_{-1}^0(\dot{y}^2(x)+tgx)dx$	y(-1)=-1, y(0)=4, $\int_{-1}^0 y(x)dx$ =4

8	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (\dot{y}^2(x) + ctgx)dx$	y(-1)=0, y(0)=1, $\int_{-1}^{0} y(x)dx$ =2
9	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (\dot{y}^2(x) + chx)dx$	y(-1)=-1, y(0)=1, $\int_{-1}^{0} y(x)dx$ =2
10	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (\dot{y}^2(x) + shx)dx$	y(-1)=-2, y(0)=3, $\int_{-1}^{0} y(x)dx$ =3
11	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} \dot{y}^2(x)dx$	y(-1)=0, y(0)=8, $\int_{-1}^{0} y(x)dx$ =2
12	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (\dot{y}^2(x) + \arcsin x)dx$	y(-1)=-1, y(0)=3, $\int_{-1}^{0} y(x)dx$ =5
13	$I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (\dot{y}^2(x) + \arccos x)dx$	y(-1)=2, y(0)=4, $\int_{-1}^{0} y(x)dx$ =3
14	$I[y(x)] = \int_{0}^{1} (\dot{y}^2(x) + arctgx)dx$	y(0)=1, y(1)=7, $\int_{0}^{1} y(x)dx$ =1
15	$I[y(x)] = \int_{0}^{1} (\dot{y}^2(x) + \ln x)dx$	y(0)=1, y(1)=3, $\int_{0}^{1} y(x)dx$ =6
16	$I[y(x)] = \int_{0}^{1} (\dot{y}^2(x) + \lg x)dx$	y(0)=0, y(1)=4, $\int_{0}^{1} y(x)dx$ =7
17	$I[y(x)] = \int_{0}^{2} (\dot{y}^2(x) + 5^x)dx$	y(0)=1, y(2)=2, $\int_{0}^{2} y(x)dx$ =6
18	$I[y(x)] = \int_{0}^{2} (\dot{y}^2(x) + 6^x)dx$	y(0)=2, y(2)=4, $\int_{0}^{2} y(x)dx$ =1
19	$I[y(x)] = \int_{0}^{2} (\dot{y}^2(x) + 7^x)dx$	y(0)=3, y(2)=5, $\int_{0}^{2} y(x)dx$ =2
20	$I[y(x)] = \int_{0}^{1} (\dot{y}^2(x) + e^{2x})dx$	y(0)=1, y(1)=-2, $\int_{0}^{1} y(x)dx$ =3
21	$I[y(x)] = \int_{0}^{1} (\dot{y}^2(x) + e^{3x})dx$	y(0)=-2, y(1)=0, $\int_{0}^{1} y(x)dx$ =4
22	$I[y(x)] = \int_{0}^{1} (\dot{y}^2(x) + 8^x)dx$	y(0)=3, y(1)=-1, $\int_{0}^{1} y(x)dx$ =2

23	$I[y(x)]=\int_0^1(\dot{y}^2(x)+e^{5x})dx$	y(0)=0, y(1)=3, $\int_0^1 y(x)dx=5$
24	$I[y(x)]=\int_{-2}^0(\dot{y}^2(x)+9^x)dx$	y(-2)=1, y(0)=4, $\int_{-2}^0 y(x)dx=2$
25	$I[y(x)]=\int_{-2}^0(\dot{y}^2(x)+\sin 2x)dx$	y(-2)=-2, y(0)=1, $\int_{-2}^0 y(x)dx=8$
26	$I[y(x)]=\int_{-2}^0(\dot{y}^2(x)+\cos 2x)dx$	y(-2)=0, y(0)=2, $\int_{-2}^0 y(x)dx=3$
27	$I[y(x)]=\int_{-2}^0(\dot{y}^2(x)+\ln 2x)dx$	y(-2)=-1, y(0)=0, $\int_{-2}^0 y(x)dx=2$
28	$I[y(x)]=\int_0^2(\dot{y}^2(x)+tg2x)dx$	y(0)=1, y(2)=2, $\int_0^2 y(x)dx=1$
29	$I[y(x)]=\int_0^2(\dot{y}^2(x)+ctg3x)dx$	y(0)=2, y(2)=3, $\int_0^2 y(x)dx=4$
30	$I[y(x)]=\int_0^2(\dot{y}^2(x)+\arcsin 2x)dx$	y(0)=-1, y(2)=1, $\int_0^2 y(x)dx=3$

II. Задача Лагранжа. Потрібно знайти екстремум функціонала

$$I[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx \tag{10}$$

при граничних умовах

$$\begin{aligned} y(x_0)&=y_0, \qquad y(x_1)=y_1, \\ z(x_0)&=z_0, \qquad z(x_1)=z_1 \end{aligned} \tag{11}$$

і обмеженні

$$\Phi(x,y,z)=0. \tag{12}$$

Розв`язок (10)-(12) шукається в класі неперервно-диференційовних на інтервалі $[x_0, x_1]$ скалярних функцій *y(x)* і *z(x)* аргументу *x*.

Припустимо, що функції F і Φ неперервно-диференційовні по усіх своїх аргументах у деякій відкритій області $\Omega\subset R^3$. Необхідні умови екстремума в задачі Лагранжа даються теоремою.

ТЕОРЕМА. Для того щоб пара функцій $(y^*(x), z^*(x))$ доставляла екстремум задачі (10) -(12), необхідно, щоб ці функції задовольняли системі рівнянь :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial y'}) = 0,) \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial L}{\partial z'}) = 0, \end{cases} \qquad (13)$$

де

$$L(x, y, z, y', z', \lambda) = F(x, y, z, y', z') + \lambda(x)\Phi(x, y, z) \ . \qquad (14)$$

Тут λ(x) − деяка функція змінної *x*.

З теореми випливає, что задача Лагранжа зводиться до найпростішої векторної задачі варіаційного числення для функціонала

$$I^* = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, z, y', z', \lambda)dx \ . \qquad (15)$$

У зв'язку з цим, дана теорема допускає інше формулювання.

ТЕОРЕМА. Для того щоб пара функцій $(y^*(x), z^*(x))$ доставляла екстремум задачі (10)-(12), необхідно, щоб ця ж пара функцій доставляла безумовний екстремум функціоналу (15) при граничних умовах (11).

Помітимо, по-перше, що обмеження (12) є рівнянням Ейлера по перемінній λ(x) для функціонала (15), і, по-друге, що приведена теорема без зусиль узагальнюється на задачі більш високої розмірності.

Приклад. Знайти найкоротшу відстань між точками A(1,-1,0) і B(2,1,-1), що лежать на поверхні 15x-17y+z-22=0.

Розв‘язання. Відомо, що відстань між двома точками A(x_0, y_0, z_0) і B(x_1, y_1, z_1) на поверхні *φ(x,y,z)* визначається по формулі

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$$

де *y=y(x)*, *z=z(x)*. За умовою задачі треба знайти мінімум *l* за умови *φ(x,y,z)=0*. У нашому випадку $x_0 = 1, x_1 = 2,\ \varphi(x, y, z) = 15x - 7y + z - 22.$

Таким чином, маємо задачу Лагранжа: мінімізувати функціонал

$$I[y, z] = \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx, \qquad (16)$$

при умовах

$$y\,(1)=-1, \qquad y(2)=1,$$

$$z(1)=0, \qquad z(2)=-1, \tag{17}$$

$$15x-7y+z-22=0. \tag{18}$$

Складемо допоміжний функціонал

$$I^* = \int_1^2 [\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)(15x-7y+z-22)]dx$$

і випишемо систему рівнянь Ейлера для нього

$$\lambda(x)(-7) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0, \tag{19}$$

$$\lambda(x)*1 - \frac{d}{dx}\left(\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0. \tag{20}$$

Розв`яжемо систему рівнянь (19), (20), використовуючи умову зв'язку (18).

Пермножаючи рівняння (20) на 7 і складаючи з (19), отримаємо

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0,$$

відкіля

$$\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1. \tag{21}$$

З (18) маємо

$$z' = 7y' - 15. \tag{22}$$

Підставляючи це значення в (21) і розв`язиваючи отримане диференціальне рівняння, знайдемо

$$y(x) = \widetilde{C}_1 x + C_{2.}$$

Граничні умови (17) дають $\widetilde{C}_1 = 2, C_2 = -3,$ так що

$$y(x)=2x-3. \tag{23}$$

З (22) з врахуванням (23) знаходимо

$$z(x)=1-x. \tag{24}$$

З (19) і (20) отримаємо λ(x)=0. Шукана відстань:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx = \sqrt{6}.$$

Цей результат виходить також з очевидних геометричних розумінь.

Відповідно до номера варіанта розв`язати наступну задачу: знайти найкоротшу відстань між точками A(x_0, y_0, z_0) і B(x_1, y_1, z_1), що лежать на поверхні $\varphi(x, y, z)$=0, де координати точок і рівняння поверхні визначаються з таблиці.

№	$A(x_0, y_0, z_0)$	$B(x_1, y_1, z_1)$	$\varphi(x, y, z)$=0
1	(1,0,-1)	(0,-1,1)	x+y+z=0
2	(1,1,1)	(2,0,0)	2x-3y+5z-4=0
3	(0,-5,1)	(1,0,12)	x+2y-z+11=0
4	(0,1,-2)	(2,0,1)	x-4y-2z=0
5	(5,0,0)	(3,0,-6)	3x+2y-z-15=0
6	(0,0,2)	(1,2,0)	4x-y+z-2=0
7	(0,-1,1)	(1,6,7)	13x-y-z=0
8	(-3,-1,1)	(-1,0,0)	x-8y-6z+1=0
9	(0,1,-1)	(-1,2,0)	x-2y+3z+5=0
10	(0,1,5)	(1,-2,-2)	8x+5y-z=0
11	(1,-1,5)	(0,0,6)	x-y+2z-12=0
12	(1,1,4)	(2,0,2)	3x+5y-z-4=0
13	(-8,0,8)	(-10,1,6)	x-z+16=0
14	(1,-3,1)	(2,-3,0)	2x-y+2z-7=0

15	(-2,2,0)	(1,3,1)	x-3y+8=0
16	(0,0,0)	(-2,1,0)	2x+4y-5z=0
18	(2,-1,1)	(0,1,0)	5x-y-12z+1=0
19	(0,-1,1)	(1,0,-2)	6x-3y+z-4=0
20	(1,-1,0)	(0,0,0)	x+y-5z=0
21	(0,-1,1)	(1,5,-4)	11x-y+z-2=0
22	(-1,1,-1)	(0,2,0)	3x-2y-z+4=0
23	(1,0,0)	(0,-5,8)	13x-y+z-13=0
24	(1,1,1)	(0,3,0)	7x+y-5z-3=0
25	(-1,-1,0)	(0,-2,1)	3x+2y-z+5=0

Контрольні питання

1. Постановка варіаційних задач на умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача.
2. Узагальнення задачі Лагранжа на випадок кінцевого числа змінних і обмежень.
3. Зведення ізопериметричної задачі до задачі Лагранжа.
4. Закон взаємності ізопериметричних задач.
5. Процедура розв`язання варіаційних задач на умовний екстремум.

Лабораторна робота 3

РОЗРИВНІ ЗАДАЧІ

1. Постановка задачі. Нехай заданий функціонал

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \ , \qquad (1)$$

де $F-$ двічі неперервно диференційовна функція своїх аргументів. Потрібно знайти функцію $y^*(x)$, що надає екстремум функціоналу (1), серед усіх кусочно-гладких функцій, що задовольняють граничним умовам

$$y(x_0)=y_0 \ , \qquad y(x_1)=y_1 \qquad (2)$$

і маючих злам у деякій точці з абцисою ξ ($x_0 < \xi < x_1$).

На відміну від найпростішої задачі варіаційного числення, розв`язок задачі (1), (2) відшукується на класі кусочно-гладких функцій *y(x)*, тобто таких, у яких на інтервалі $[x_0, x_1]$ перша похідна в кінцевому числі точок, що належать цьому інтервалу, невизначена, а на інтервалах, укладених між цими ”особливими” точками, функція *y(x)* неперервно-диференційовна. При цьому на всьому проміжку $[x_0, x_1]$ функція *y(x)* є неперервною. Ця задача у варіаційному численні відноситься до *розривних задач першого роду* і називається *задачею про відображення экстремалей*. Вона допускає наступну геометричну інтерпретацію: знайти криву $y^*(x)$, що реалізує экстремум

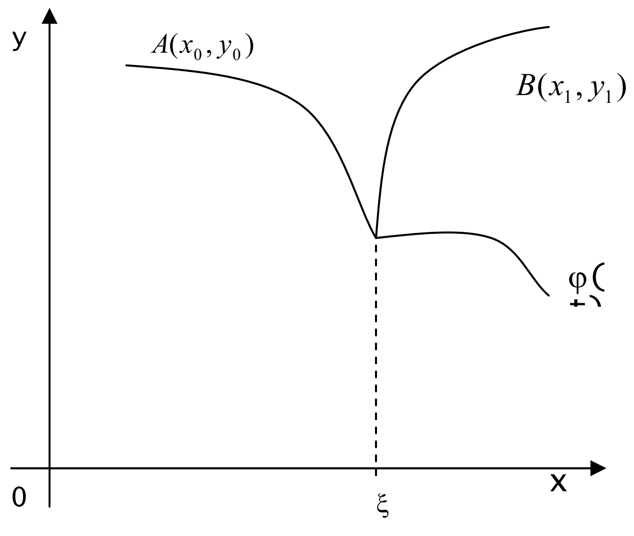

Рис.1

функціонала (1) і проходячу через задані точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, причому в точку *B* ця крива повинна потрапити лише після відображення від заданої лінії $y=\varphi(x)$ (рис.1); ξ– кутова точка.

2. Умови Вейєрштрасса-Ердмана. У найпростішій задачі варіаційного числення екстремаль функціонала є двічі неперервно-диференційовною функцією, якщо похідна $F_{y'y'}$ не обертається в нуль. Тому злам екстремалі можливий лише там, де $F_{y'y'} = 0$.

ТЕОРЕМА. Для того щоб функція $y = y^* (x)$ доставляла экстремум задачі (1), (2) на класі кусочно-гладких функцій, необхідно :

1) щоб $y^*(x)$ складалася з кінцевого числа ділянок екстремалей задачі (1), (2);

2) щоб у кожній точці ξ слабкого розриву функції $y^*(x)$ виконувалися умови Вейєрштрасса-Ердмана

$$F_{y'}\Big|_{x=\xi-0} - F_{y'}\Big|_{x=\xi+0} = 0,$$
$$(F - y' F_{y'})\Big|_{x=\xi-0} - (F - y' F_{y'})\Big|_{x=\xi+0} = 0. \qquad (3)$$

Разом з умовами неперервності шуканої екстремалі умови (3) дозволяють визначити координати точки зламу.

На кожнім із двох відрізків $[x_0, \xi]$ і $[\xi, x_1]$ екстремаль повинна задовольняти рівнянню Ейлера, тобто диференціальному рівнянню другого порядку. При розв`язанні цих двох рівнянь виходять чотири довільні постійні, котрі, взагалі говорячи, знаходяться з граничних умов (2) і умов Вейєрштрасса-Ердмана (3) у точці зламу.

Приклад. Знайти ламані екстремалі функціонала

$$I[y] = \int_0^2 (y'^4 - 6y'^2)dx \;, \quad y(0)=0, \quad y(2)=0\,,$$

допускаючи, що y' може мати одну точку розриву.

Розв'язання. У даній задачі $F_{y'y'} = 12y'^2 - 12$ може обертатися в нуль, тому можлива наявність зламів екстремалі. Тому що підінтегральна функція залежить тільки від y', то екстремалями є прямі

$$y = C_1 x + C_2.$$

Введемо позначення для екстремалі на кожнім із двох відрізків [0, ξ] і [ξ, 2] :

$$y\_ = mx + n \quad (0 \le x \le \xi),$$
$$y_+ = px + q \quad (\xi \le x \le 2).$$

З граничних умов знаходимо $y\_(0) = n = 0$, $y_+(2) = 2p + q = 0$, $n = 0$, $q = -2p$, так що

$$y\_ = mx, \quad y_+ = p(x-2). \tag{4}$$

Умова неперервності екстремалі в точці $x=\xi$ дає

$$m\xi = p(\xi - 2). \tag{5}$$

Випишемо умову Вейєрштрасса-Эрдмана. Маємо:

$$\left.\begin{aligned} F_{y'} &= 4y'^3 - 12y', \\ F - y'F_{y'} &= -3'^4 + 6y'^2. \end{aligned}\right\}$$

Оскільки $y'_- = m$, $y'_+ = p$, одержуємо

$$\left.\begin{aligned} 4m^3 - 12m &= 4p^3 - 12p, \\ -3m^4 + 6m^2 &= -3p^4 + 6p^2 \end{aligned}\right\}$$

чи

$$\left.\begin{aligned} (m-p)(m^2 + mp + p^2 - 3) &= 0, \\ (m^2 - p^2)(m^2 + p^2 - 2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Друге рівняння в (6) відразу дає $m=p$ чи $m=-p$ чи $m^2 + p^2 - 2 = 0$. Розв`язок $m=p$ повинне бути відкинуте: при ньому екстремаль має неперервну похідну $y'_- = y'_+$, а з умови (5) одержуємо, що $m=0$, тобто екстремаль – відрізок осі OX, что суперечить умові задачі.

Таким чином, розв`язок системи (6) зводиться до розв`язаня наступних систем рівнянь :

$$\left.\begin{aligned} m &= -p, \\ m^2 + mp + p^2 &= 3 \end{aligned}\right\} \quad (7$$

і

$$\left.\begin{aligned} m^2 + p^2 &= 2, \\ m^2 + mp + p^2 &= 3. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Розв\`язок системи (7): $m=\sqrt{3},\ p=-\sqrt{3}$ і $m=-\sqrt{3},\ p=\sqrt{3}.$ Розв\`язок системи (8): *m=p=±1* повинне бути відкинуто. Отже, *m=-p* і умова неперервності (5) дає ξ=1. Отже, шукані екстремалі:

$$y=\begin{cases} \sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ -\sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2, \end{cases} \qquad \text{(рис.2)}$$

і

$$y \quad \begin{cases} -\sqrt{3}x, & 0 \le x < 1, \\ \sqrt{3}(x-2), & 1 \le x \le 2. \end{cases} \qquad \text{(рис.3)}$$

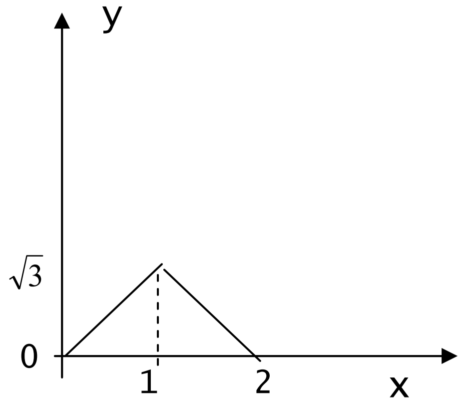

Рис.2

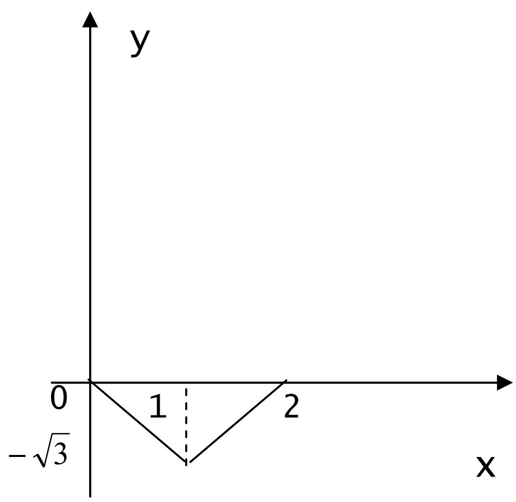

Рис.3

В усіх нижчеподаних задачах указати, чи існують розв\`язки з кутовими точками в задачі про екстремум функціонала й у випадку існування знайти їх, а також відповісти на контрольні питання.

№	Функціонал	Граничні умови
1	$\int_0^4 (\dot{y}-1)^2(\dot{y}+1)^2\,dx$	y(0)=0 , y(4)=2
2	$\int_{-1}^{1} (\dot{y}^4-3\dot{y}^2)\,dx$	y(–1)=1 , y(1)=1
3	$\int_{-1}^{1} y^2(1-\dot{y}^2)\,dx$	y(-1)=0 , y(1)=1
4	$\int_0^2 (\dot{y}^4-2\dot{y}^2)\,dx$	y(0)=3 , y(2)=2
5	$\int_0^2 \dot{y}^2(\dot{y}-1)^2\,dx$	y(0)=0 , y(2)=1
6	$\int_0^{10} \dot{y}^3\,dx$	y(0)=0 , y(10)=4
7	$\int_1^4 (\dot{y}^4-4\dot{y}^2)\,dx$	y(1)=0 , y(4)=5
8	$\int_0^1 (\dot{y}^4-\dot{y}^2)\,dx$	y(0)=0 , y(1)=4
9	$\int_0^1 (\dot{y}-2)^2(\dot{y}+2)^2\,dx$	y(0)=0 , y(1)=1
10	$\int_0^2 (\dot{y}^3+1)\,dx$	y(0)=0 , y(2)=0
11	$\int_0^1 (\dot{y}^4-8\dot{y}^2)\,dx$	y(0)=0 , y(1)=1
12	$\int_1^3 y^2(4-\dot{y}^2)\,dx$	y(1)=0 , y(3)=1
13	$\int_0^1 \dot{y}^2(\dot{y}-2)^2\,dx$	y(0)=0 , y(1)=1
14	$\int_{-2}^{0} (\dot{y}^3-1)\,dx$	y(-2)=0 , y(0)=1
15	$\int_0^3 (\dot{y}^4-\dot{y}^2)\,dx$	y(0)=1 , y(3)=2

16	$\int_3^5 (\dot{y}^4 - 5\dot{y}^2)dx$	y(3)=0 , y(5)=5
17	$\int_{-1}^1 \dot{y}^2(\dot{y}-6)^2 dx$	y(-1)=0 , y(1)=1
18	$\int_0^1 (3\dot{y}^3+1)dx$	y(0)=-1 , y(1)=0
19	$\int_{-1}^0 y^2(2-\dot{y}^2)dx$	y(-1)=0 , y(0)=1
20	$\int_1^3 (\dot{y}-3)^2(\dot{y}+3)^2 dx$	y(1)=0 , y(3)=1
21	$\int_0^1 (\dot{y}^4-2\dot{y}^2)dx$	y(0)=1 , y(1)=1
22	$\int_{-1}^1 (\dot{y}^3+4)dx$	y(-1)=1 , y(1)=0
23	$\int_1^2 (\dot{y}-4)^2(\dot{y}+4)^2 dx$	y(1)=0 , y(2)=3
24	$\int_0^1 (\dot{y}^3-3)dx$	y(0)=1 , y(1)=0
25	$\int_{-1}^1 (\dot{y}^4-7\dot{y}^2)dx$	y(-1)=0 , y(1)=1

Контрольні питання

1. Постановка розривних задач варіаційного числення.
2. Розривні задачі I і II роду.
3. Приклад розривної задачі II роду.
4. Як узагальнюються умови Вейєрштрасса-Ердмана для випадку однієї кутової точки на будь-яке кінцеве число точок слабкого розриву.
5. Зв'язок між розривними задачами I роду і задачами з вільними кінцями.

Лабораторна робота 4

НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ В ЗАДАЧАХ З РУХЛИВИМИ КІНЦЯМИ

1. Постановка варіаційних задач з рухливими кінцями. Нехай заданий функціонал

$$I[y]=\int_{x0}^{x1}F(x,y,y')dx, \tag{1}$$

де F – двічі неперервно-диференційовна функція своїх аргументів. Точки x_0 і x_1 не є фіксованими, а залежать від вибору $y(x)$ у (1). Від вибору $y(x)$ залежать також граничні значення у(x_0) і у(x_1). Нехай поряд з (1) задані дві неперервно-диференційовані функції $y=\varphi(x)$ і у=$\psi(x)$ – деякі криві в площині XOY. Задача ставиться таким чином: знайти функцію у(x), що повідомляє екстремум функціоналу (1), серед всіх неперервно-диференційованих кривих, кінці яких лежать відповідно на у=$\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ (рис.1а). Частинним випадком цієї задачі є задача з закріпленим часом (рис.1б).

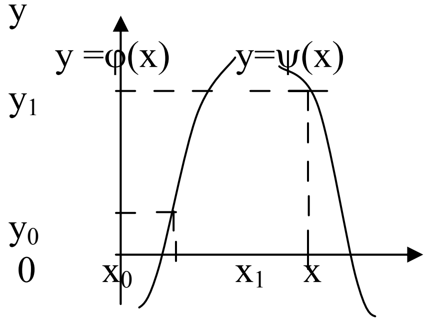

Рис.1а

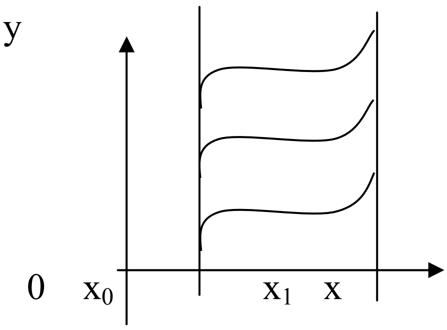

Рис.1б

2. Необхідні умови екстремума в задачах з рухливими кінцями :

а) крива у=$y(x)$, на якій може реалізуватися екстремум у задачі з рухливими кінцями, повинна бути екстремаллю, тобто інтегральної кривої диференціального рівняння Ейлера (тому що задача з закріпленими кінцями є частинним випадком розглянутої задачі, то її основна необхідна умова переноситься і на цей випадок)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0; \tag{2}$$

б) крива у=$y(x)$ повинна задовольняти умовам *трансверсальності,* тобто умовам, що встановлюють зв'язок між кутовими коефіцієнтами досліджуваної екстремалі і граничними кривими в точках їх перетину. Умови трансверсальності виходять із загальної формули першої варіації функціонала (1) шляхом прирівнювання нулю коефіцієнтів при відповідних варіаціях. У випадку явного завдання граничних кривих $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ ці умови мають вид:

$$\left[F(x,y,y') + (\varphi'(x) - y'(x)) \cdot \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right]_{x=x0} = 0,$$
$$\left[F(x,y,y') + (\psi'(x) - y'(x)) \cdot \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}\right]_{x=x1} = 0, \qquad (3)$$

у випадку неявного завдання граничних кривых ($h_0(x,y(x))=0$ – ліва гранична крива, $h_1(x,y(x))=0$ – права)

$$\left[\frac{F(x,y,y') - y' \cdot \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}}{\dfrac{\partial h_0}{\partial x}} - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}{\dfrac{\partial h_0}{\partial y}}\right]_{x=x0} = 0,$$

$$\left[\frac{F(x,y,y') - y' \cdot \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}}{\dfrac{\partial h_1}{\partial x}} - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y'}}{\dfrac{\partial h_1}{\partial y}}\right]_{x=x1} = 0, \qquad (4)$$

а для задачі з закріпленим часом (з вільними кінцями) умови трансверсальності запишуться у виді

$$\frac{\partial F(x_0, y(x_0), y'(x_0))}{\partial y'} = 0,$$

$$\frac{\partial F(x_1, y(x_1), y'(x_1))}{\partial y'} = 0. \qquad (5)$$

<u>3. Порядок розв`язання задачі:</u>

а) розв`язуючи рівняння (2), знаходимо сімейство екстремалей, що залежить від двох довільних постійних $y=y(x,з_1,з_2)$;

б) з умови перетину кривых цього сімейства з граничними кривими визначаємо точки $x_0=x_0(з_1,з_2)$, $x_1=x_1(з_1,з_2)$. Відповідні системи мають вид:

- у випадку явного завдання граничних кривих

$$y(x_0,з_1,з_2)=\varphi(x_0),$$
$$y(x_1,з_1,з_2)=\psi(x_1), \qquad (6)$$

- у випадку неявного завдання граничних кривих

$$h_0(x_0, y(x_0,з_1,з_2))=0,$$
$$h_1(x_1, y(x_0,з_1,з_2))=0. \qquad (7)$$

в) підставляючи отримані величини y=$y(x,з_1,з_2)$, $x_0=x_0(з_1,з_2)$, $x_1=x_1(з_1,з_2)$ у яке-небудь з умов трансверсальності (3)-(5) (відповідно розглядуваної задачі), одержуємо алгебраїчну систему для визначення c_1 і c_2;
г) при цих значеннях c_1 і c_2 із сімейства екстремалей виділяємо конкретну екстремаль $y=y(x)$, на якій може реалізуватися екстремум у варіаційній задачі з рухливими кінцями.

4.Завдання:

а) знайти криву, на якій може досягатися екстремум функціонала і дати геометричну інтерпретацію (див. таблицю);
б) показати що для функціонала виду

$$I[y]=\int_{x0}^{x1} g(x,y)\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx,$$

де $g(x,y)\neq 0$ у граничних точках, умови трансверсальності є умовами ортогональності, тобто

$$y'(x)\big|_{x=x0}=-1/\varphi'(x)\big|_{x=x_0},$$

$$y'(x)\big|_{x=x1}=-1/\psi'(x)\big|_{x=x_1}.$$

Приклад. Знайти криву, на якій може досягатися екстремум функціонала

$$I[y]=\int_{x0}^{x1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

за умови, що лівий кінець екстремалі може переміщатися по кривій $y=x^2-1$, а правий – по прямій $y=x-2$, тобто $\varphi(x)=x^2-1$, $\psi(x)=x-2$.

Розв'язання. а) Загальний розв`язок рівняння Ейлера для вихідного функціонала має вид: $y= c_1x\ c_2$, де c_1 і c_2 – довільні постійні, які необхідно визначити.
б) З умови перетину кривих визначаємо точки $x_0=x_0(з_1,з_2)$, $x_1=x_1(з_1,з_2)$:

$$\begin{cases} c_1x_0+c_2=x_0^2-1 \\ c_1x_1+c_2=x_1-2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0=\dfrac{c_1\pm\sqrt{c_1^2+4c_2+4}}{2} \\ x_1=\dfrac{-c_2-2}{c_1-1} \end{cases},$$

в) Умови трансверсальності мають вид:

$$\left[\sqrt{1+y'^2}+(2x-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x0}=0,$$

$$\left[\sqrt{1+y'^2}+(1-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]\Bigg|_{x=x1}=0,$$

де $y'=c_1$.

г) Підставляємо в них $y'=c_1$ і отримані вирази для x_0 і x_1. У результаті будемо мати систему для визначення c_1 і c_2:

$$\begin{cases}\sqrt{1+c_1^2}\pm\sqrt{c_1^2+4c_2+4}\cdot\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}=0\\[2ex] \sqrt{1+c_1^2}+(1-c_1)\cdot\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}=0\end{cases},\qquad \begin{cases}\sqrt{1+c_1^2}\pm\sqrt{c_1^2+4c_2+4}\cdot\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}=0\\[2ex] 1+c_1^2+c_1-c_1^2=0\end{cases},$$

$$\begin{cases}(\sqrt{2})^2-\sqrt{1+4c_2+4}=0\\ c_1=-1\end{cases},\qquad \begin{cases}4c_2+5=4\\ c_1=-1\end{cases},\qquad \begin{cases}c_2=-\dfrac{1}{4}\\ c_1=-1.\end{cases}$$

д) Рівняння екстремалі і невідомі межі інтегрування x_0 і x_1 :

$$y^*=-x-1/4\ ,\quad x_0=1/2,\quad x_1=7/8.$$

е) Екстремальне значення функціонала

$$I\left[y^*\right]=\int_{1/2}^{7/8}\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=3\sqrt{2}\big/8\ .$$

Геометричний зміст вихідної задачі складається в знаходженні відстані між параболою $y=x^2-1$ і прямою $y=x-2$. Шукана відстань дорівнює $3\sqrt{2}/8$.

Таблиця

№	Функціонал	Граничні умови
1	$I[y]=\int_0^x\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y}dx$	y(0)=1, ψ(x)=x-5
2	$I[y]=\int_0^{\pi/4}(y^2-\dot{y}^2)dx$	y(0)=0, ψ(x)=π/4
3	$I[y]=\int_0^x\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y}dx$	y(0)=1, $h_1(x,y(x))=(x-9)^2+y^2-9=0$

4	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	φ(x)=x^2, ψ(x)=x-5
5	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	x_0=1, y(1)=0, $h_1(x,y)=4x^2+9y^2-36=0$
6	$I[y]=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(-1)=5, $h_1(x,y)=x-y^2=0$
7	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y}dx$	φ(x)=x+8, ψ(x)=x-5
8	$I[y]=\int\limits_{-1}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	ψ(x)=1-3x, y(-1)=3
9	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	$h_0(x,y)=x^2+y^2-1=0$, $h_1(x,y)=x+y-4=0$
10	$I[y]=\int\limits_{-5}^{x}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(-5)=1, $h_1(x,y)=(x-3)^2+(y-1)^2-4=0$
11	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	φ(x)=-x-3, $h_1(x,y)=y-(x-3)^2=0$
12	$I[y]=\int\limits_{1}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(1)=0, $h_1(x,y)=4x^2+9y^2-16=0$
13	$I[y]=\int\limits_{-1}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(-1)=6, $h_1(x,y)=2x-y^2=0$
14	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y}dx$	φ(x)=x+3, ψ(x)=x-8
15	$I[y]=\int\limits_{-3}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(-3)=2, $h_1(x,y)=y-x^2-2=0$
16	$I[y]=\int\limits_{2}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(2)=1, ψ(x)=x-4
17	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	φ(x)=x+3, ψ(x)=x-6
18	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	φ(x)=-2x-4, x_1=2, y(2)=5
19	$I[y]=\int\limits_{x0}^{x1}\sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	φ(x)=x^2-4x+4, ψ(x)=x-4

20	$I[y] = \int_{-1}^{x1} \sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(-1)=3, $h_1(x,y)=x^2+y^2-16=0$
21	$I[y] = \int_{-4}^{x1} \sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	y(-4)=0, $\psi(x)=x^2+5$
22	$I[y] = \int_{x0}^{x1} \sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	$\varphi(x)=x+7$, $\psi(x)=x-9$
23	$I[y] = \int_{x0}^{x1} \sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	$\varphi(x)=-x+4$, $\psi(x)=(x-1)^2$
24	$I[y] = \int_{x0}^{x1} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{y}dx$	$\varphi(x)=-x-2$, $\psi(x)=1-x$
25	$I[y] = \int_{x0}^{6} \sqrt{1+\dot{y}^2}dx$	$\varphi(x)=(x-3)^2$, y(6)=0

Лабораторна робота 5

ТЕОРІЯ ГАМІЛЬТОНА– ЯКОБІ

I. Канонічна форма рівнянь Ейлера. Нехай заданий функціонал

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_i, y_i')dx \qquad (i=1,2,\ldots, n), \tag{1}$$

залежний від n невідомих функцій $y_i(x) \in C_1[x_1, x_2]$. Рівняння Ейлера для функціонала (1) мають вид

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n)\ldots \tag{2}$$

Це система n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Проінтегрувати її в замкнутому виді вдається лише в деяких окремих випадках. Тому важливим є пошук інших шляхів і методів дослідження варіаційних задач. Саме цьому питанню і присвячена теорія Гамільтона–Якобі.

Одержимо для рівняння Ейлера симетричну форму, ввівши замість x, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ іншу систему змінних – так називані *канонічні змінні* $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *і* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, де

$$p_i = \partial F/\partial y_i' \quad (i=1,2,\ldots,n)\ldots \tag{3}$$

Припустимо, що визначник, складений з похідних $\partial^2 F/\partial y_i' \partial y_k'$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$ відмінний від нуля для всіх $x \in [x_1, x_2]$. Тоді величини y_i' можна виразити з (3) через канонічні змінні, тобто

$$y_i' = \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n). \tag{4}$$

Введемо допоміжну функцію

$$H(x, y_i, p_i) = \left[-F(x, y_i, y_i') + \sum_{j=1}^{n} y_j' \frac{\partial F}{\partial y_j'} \right] \Bigg|_{y_i' = \varphi_i(x, y_i, p_i)} . \tag{5}$$

Ця функція називається *функцією Гамільтона* чи *гамільтоніаном* для функціонала (1). З її допомогою можна побудувати систему диференціальних рівнянь, еквівалентну системі рівнянь Ейлера (2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dfrac{dy_i}{dx} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y_i} = -\dfrac{dp_i}{dx} \end{cases} \qquad (\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}). \tag{6}$$

Система (6) – це система $2n$ звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Вона називається *канонічною* чи *гамільтоновою системою* рівнянь Ейлера (2).

Приклад. Скласти канонічну систему рівнянь Ейлера для функціонала

$$I[y_1,y_2] = \int_0^{\pi} (2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2)\, dx.$$

Розв`язання. У даному випадку $F(x,y_i,y_i') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2$. Згідно (3) вважаємо:

$$\partial F/\partial y_1' = p_1; \quad \partial F/\partial y_2' = p_2.$$

Тоді $p_1 = 2y_1'$, $p_2 = -2y_2'$. Тут

$$det\, ||\, \partial^2 F/\partial y_i' \partial y_k' || = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Розв`язуючи отримані відношення відносно y_1', y_2', знайдемо

$$y_1' = p_1/2, \qquad y_2' = -p_2/2.$$

Далі, з (5) знаходимо гамільтоніан даного функціонала

$$H = \left(-F + y_1'\, \partial F/ y_1' + y_2'\, \partial F/ y_2' \right)\Big|_{\substack{y_1' = p_1/2 \\ y_2' = -p_2/2}} =$$

$$= \left(-2y_1y_2 + 2y_1^2 + y_1'^2 - y_2'^2 \right)\Big|_{\substack{y_1' = p_1/2 \\ y_2' = -p_2/2}} = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + p_1^2/4 - p_2^2/4$$

Використовуючи співвідношення (6), одержимо канонічну систему рівнянь Ейлера:

$$\begin{cases} \dfrac{p_1}{2} = \dfrac{dy_1}{dx}; & -\dfrac{p_2}{2} = \dfrac{dy_2}{dx}; \\ 4y_1 - 2y_2 = -\dfrac{dp_1}{dx}; & 2y_1 = \dfrac{dp_2}{dx} \end{cases}.$$

Тут $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$, $p_1=p_1(x)$, $p_2= p_2(x)$ є невідомими функціями від x.

II. Рівняння Гамільтона – Якобі. Розглянемо функціонал (1) з урахуванням виразу для функції Гамільтона (5).

$$I[y_i] = I[y_i,p_i] = \int_{x_1}^{x_2} \left[-H(x,y_i,p_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i' p_i \right] dx, \tag{7}$$

де y_i, p_i розглядаються як невідомі функції від x.

Неважко переконатися, что канонічна система рівнянь Ейлера (6) є системою рівнянь Ейлера для функціонала $I[y_i,p_i]$. Даний функціонал I є розв`язком рівняння в частинних похідних першого порядку виду:

$$\partial W/\partial x + H(x, y_1,\ldots,y_n, \partial W/\partial y_1,\ldots,\partial W/\partial y_n)=0, \tag{8}$$

яке називається *рівнянням Гамільтона – Якобі*.

Існує тісний зв'язок між рівнянням Гамільтона – Якобі і канонічними рівняннями Ейлера, що дається наступною теоремою.

ТЕОРЕМА (Гамільтона– Якобі). Нехай $W = W(x, y_i, C_i)$ $(i =\overline{1,n})$ є загальним інтегралом рівняння Гамільтона – Якобі, що задовольняє умові

$$det \,||\, \partial^2 W/\partial y_i \partial C_j || \neq 0.$$

Тоді функції $y_i = y_i(x, C_i, B_i)$, обумовлені співвідношеннями

$$\partial W/\partial C_i = B_i, \quad \partial W/\partial y_i = p_i \ (i =1,2,...,n),$$

де B_i і C_i – довільні постійні утворять загальний розв`язок канонічної системи (6), тобто дають екстремалі функціонала (1).

Приклад. Знайти екстремалі функціонала

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2 + y^2}\ \sqrt{1+y'^2}\ dx$$

за допомогою рішення рівняння Гамільтона – Якобі.

Розв'язання. Для отриманого рівняння Гамільтона – Якобі знаходимо гамільтоніан даного функціонала:

$$H = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2} \quad .$$

Тоді рівняння Гамільтона – Якобі має вид

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \sqrt{x^2 + y^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} = 0 \qquad (9)$$

чи

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2 \quad .$$

Перепишемо рівняння (9) у виді:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - y^2 = 0$$

і примінимо метод поділу змінних, зажадавши, щоб

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - x^2 = -C;$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - y^2 = C;$$

де C – довільна постійна. Ясно, що при таких вимогах рівняння (9) обертається в тотожність. Далі, знаходимо

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\sqrt{x^2-C},$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}=\sqrt{y^2+C} \quad . \tag{10}$$

Загальний інтеграл рівняння (9) буде мати вид

$$w=\int\sqrt{x^2-C}dx+\int\sqrt{y^2+C}dy \ . \tag{11}$$

Дійсно, інтегруючи перше рівняння (10), одержуємо

$$w=\int\sqrt{x^2-C}dx+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\varphi'(y)=\sqrt{y^2+C} \ ; \ \varphi(y)=\int\sqrt{y^2+C}dy+C_0 \ .$$

Таким чином,

$$w=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-C}-\frac{C}{2}\ln|\,x+\sqrt{x^2-C}\,|+\frac{y}{2}\sqrt{y^2+C}+\frac{C}{2}\ln|\,y+\sqrt{y^2+C}\,|+C_0,$$

де C и C_0 – довільні постійні.

З умови теореми $\frac{\partial w}{\partial C}=\tilde{B}$, де $\tilde{B}$ - довільна постійна, знайдемо загальний розв\`язок рівняння Ейлера. Маємо

$$-\frac{x}{4\sqrt{x^2-C}}-\frac{1}{2}\ln|\,x+\sqrt{x^2-C}\,|+\frac{C}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-C})*\sqrt{x^2-C}}+$$
$$+\frac{y}{4\sqrt{y^2-C}}+\frac{1}{2}\ln|\,y+\sqrt{y^2+C}\,|+\frac{C}{4}\frac{1}{(y+\sqrt{y^2+C})*\sqrt{y^2+C}}=\tilde{B} \ .$$

Після нескладних спрощень одержимо

$$x^2-\frac{1-B^2}{B}xy-y^2=C\left(\frac{B^2+1}{2B}\right)^2 .$$
$$(B=\pm e^{2\tilde{B}})$$

Це сімейство гіпербол є сімейством екстремалей

В усіх нижчеподаних варіантах скласти канонічні системи рівнянь Ейлера, побудувати рівняння Гамільтона–Якобі й у випадку поділу змінних знайти екстремалі функціоналів.

№	Функціонал	Граничні умови і примітки
1	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} xy\sqrt{y'}dx$	Знайти сімейство екстремалей
2	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} xyy'^2\,dx$	y(1)=0, y(e)=1
3	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} (tg\ y)\ \sqrt{1+y'^2}dx$	Знайти сімейство екстремалей
4	$I[y]=\int_0^1 \left(y'^2/2+yy'+y'+y\right)dx$	Кінці вільні
5	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} (\sec y^2)\sqrt{1+y'^2}dx$	Знайти сімейство екстремалей
6	$I[y]=\int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$	Лівий кінець вільний $y(x_2)=y_2$, $x_2>0$, $y_2>0$
7	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} \left(2xy_1-y_1'^2+\frac{y_2'^3}{3}\right)dx$	Знайти сімейство екстремалей
8	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} \left(x^2+y_1y_1'^2+y_2y_2'^2\right)dx$	Знайти сімейство екстремалей
9	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} e^y\sqrt{1+y'^2}dx$	Знайти сімейство екстремалей
10	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} \left(y_1'^2+y_2^2+y_2'^2\right)dx$	Знайти сімейство екстремалей
11	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{9+y^2}\sqrt{y'^2+1}dx$	Знайти сімейство екстремалей
12	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} xyy'^3\,dx$	Знайти сімейство екстремалей
13	$I[y]=\int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$	Правий кінець вільний, y(0)=0
14	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} (\arccos y^3)\sqrt{1+y'^2}dx$	Знайти сімейство екстремалей
15	$I[y]=\int_{x_1}^{x_2} y_1^2y^2{}_2(x^2+\dot{y}_1^2+\dot{y}_2^2)dx$	Знайти сімейство екстремалей

16	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}\left(x^2\dot{y}_1^{\,2}+y^2\right)dx$	Знайти сімейство екстремалей
17	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} y\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}\,dx$	Знайти сімейство екстремалей
18	$I[y]=\int\limits_{0}^{1} y^3\sqrt{1+y'^2}\,dx$	Знайти сімейство екстремалей
19	$I[y]=\int\limits_{2}^{3}\left(y_1'^2+y_2'^2\right)dx$	Знайти сімейство екстремалей
20	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} x\sqrt{y}y'^2\,dx$	Знайти сімейство екстремалей
21	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} y\ \sin y\ \sqrt{1+y'^2}\,dx$	Знайти сімейство екстремалей
22	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} (y'^2+yy')dx$	Знайти сімейство екстремалей
23	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} cos^2 y\sqrt{1+y'^2}\,dx$	Знайти сімейство екстремалей
24	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{1}{4}y'^2+y'+y\right)dx$	Знайти сімейство екстремалей
25	$I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2} \ln y\sqrt{1+y'^2}\,dx$	Знайти сімейство екстремалей

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 228 с.
2. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И.* Вариационное исчисление (задачи и упражнения). – М.: Наука, 1973. – 190 с.
3. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.: Гостехиздат, 1950. – 296 с.
4. *Смирнов В.И., Крылов В.П., Канторович Л.В.* Вариационное исчисление. – Л.: КУБУ, 1933. – 432 с.
5. *Эльсгольц Л.Э.* Вариационное исчисление.– М: ОНТИ, 1958. – 279 с.
6. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Наука, 1974. – 374 с.